Sfax-1, Mahdia, Ben Arous & Tunis-2	Devoir de synthèse N°3		$4^{ème}$ Math
Date : 06 / 05 / 2025	Mathématiques	Coefficient : 4	Durée : 4 h

Noter bien : • Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté des réponses.
• Aucun document n'est autorisé, sauf, une calculatrice non programmable.
• L'indication des références des exercices et des questions est obligatoire.

Exercice N°1: (2,5 points).

Q.C.M. : Déterminer, à chaque fois et **sans justification**, la seule réponse correcte :

1. La fonction $f : x \longmapsto f(x) = 3^x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$ on a :
   a) $f'(x) = 3^x$ **b)** $f'(x) = x \times 3^{x-1}$ **c)** $f'(x) = (\ln 3) \times 3^x$
2. Si la période radioactive, exprimée en années, d'un élément chimique est une variable aléatoire X continue qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda \in]0, +\infty[$ alors la période m vérifiant $p(X \leq m) = p(X \geq m) = \frac{1}{2}$ est appelée mi-vie et elle vaut :
   a) $\frac{\lambda}{2}$ **b)** $\frac{\ln 2}{\lambda}$ **c)** $\sqrt{\lambda}$
3. Si Y est une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de ses valeurs prises est $\{3\,,\,6\,,7\,,12\}$ et telle que sa fonction de répartition F vérifie $F(2\sqrt{5}) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ alors :
   a) $p(Y = 3) = \frac{1}{3}$ **b)** $p(Y = 3) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ **c)** $p(Y = 3) = \frac{1}{4}$

V./F. : Répondre, à chaque fois et **avec justification**, par vrai ou faux :

Soit (x, y) une série statistique double donnée par :

x	470	480	490	α	550
y	4,5	5	5,5	6	6,5

telle que α est une valeur cachée et dont $D : y = 0,02375x - 6,375$ est sa droite de régression de y en x alors :

1. La valeur de α est égale à 500
2. Si $D' : x = a'y + b'$ est sa droite de régression de x en y alors $a' = 38$

Exercice N°2: (2,5 points).

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' + y = 0$
2. Soit Γ l'ensemble de fonctions g définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $g'(x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$
   - (a) Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \cos x$ est un élément de Γ
   - (b) Montrer que si g est un élément de Γ alors pour tout réel x on a : $g''(x) = g'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
   - (c) En déduire que si g est un élément de Γ alors g est une solution de (E)
   - (d) Déterminer alors l'ensemble Γ

http://mathematiques.kooli.me/

Exercice N°3: **(3,5 points).**

Soient U_1 et U_2 deux urnes telles que U_1 contient cinq jetons numérotés : 0 , 1 , 2 , 2 , 2 alors que U_2 contient six jetons numérotés : 0 , 1 , 1 , 1 , 2 , 2 **(On donnera les résultats sous fractions).**

1. On tire un jeton de U_1 et un jeton de U_2 et on considère les événements suivants :
   N « Obtenir un produit de numéros nul » et I « Obtenir deux numéros identiques ».
   a. Montrer que $p(N) = \frac{1}{3}$
   b. Sachant qu'on a obtenu un produit non nul, quelle est la probabilité d'obtenir deux numéros identiques ?
   c. Les événements N et I sont-ils indépendants ? Justifier.
2. Soit X la variable aléatoire indiquant le produit des numéros obtenus.
   Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer $E(X)$.
3. On répète l'épreuve précédente n fois de suite $(n \geq 2)$, en remettant à chaque fois les jetons tirés dans leurs urnes d'origines.
   a. Calculer, en fonction de n, la probabilité p_n d'avoir N réalisé au moins une fois.
   b. Déterminer le plus petit entier naturel n pour que l'on ait : $p_n \geq 0,9$

Exercice N°4: **(4,5 points).**

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{23} \equiv 3 (mod\, 5)$

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $3x \equiv 1 (mod\, 5)$
2. Soit x une solution de (E) :
   a. Prouver que x et 5 sont premiers entre eux.
   b. En déduire que $3x \equiv 1 (mod\, 5)$
3. Soit x un entier dont le reste modulo 5 est 2
   a. Montrer que x est une solution de (E)
   b. En déduire l'ensemble des solutions de (E)
4. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E') : 2u - 5v = 1$
   a. Vérifier que si (u, v) est une solution de (E') alors $2u \equiv 1 (mod\, 5)$
   b. Déterminer, alors, une solution particulière de (E')
   c. Résoudre, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E')
   d. Etablir que $\begin{cases} x \equiv 2 (mod\, 5) \\ x \equiv 1 (mod\, 2) \end{cases} \iff x \equiv 7 (mod\, 10)$
5. Vérifier que $7^{2025} \equiv 7 (mod\, 100)$
6. Soit x un entier naturel impair solution de (E)
   a. Montrer qu'il existe un entier p tel que $x = 10p + 7$
   b. En utilisant la formule du binôme, montrer que $x^{2025} \equiv 7^{2025} (mod\, 100)$
   c. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de x^{2025}

http://mathematiques.kooli.me/

Exercice N°5: **(7 points).**

► **(I)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{1+n\ln x}{x^2}$ de courbe représentative $\mathscr{C}_n$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique 3 cm).

1 a Montrer que $\mathscr{C}_n$ admet deux asymptotes que l'on déterminera.

b Montrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par un point fixe J que l'on précisera les coordonnées.

2 a Vérifier que $\mathscr{C}_n$ coupe l'axe $(O, \vec{i})$ au point B_n d'abscisse $b_n = e^{-\frac{1}{n}}$

b Démontrer que la suite (b_n) est convergente puis donner sa limite.

3 a Justifier que f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x > 0$ on a : $f_n'(x) = \dfrac{n-2-2n\ln x}{x^3}$

b Dresser le tableau de variations de f_n et vérifier que f_n admet un maximum $y_n = \dfrac{n}{2}e^{\frac{2-n}{n}}$

c Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ sachant que $f_n(x_n) = y_n$

4 a Etudier la position relative de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$

b Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ avec deux couleurs différentes dans le repère de l'annexe ci-jointe.

► **(II)** Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

1 a Montrer que $I = 1 - \dfrac{2}{e}$

b En déduire l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 du domaine limité par $\mathscr{C}_n$, $\mathscr{C}_{n+1}$ et les droites : $x = 1$ et $x = e$

2 On désigne par a_n l'aire, en unités d'aires, de la surface plane limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = e$

a Calculer a_1

b Montrer que la suite (a_n) est arithmétique de raison $r = 1 - \dfrac{2}{e}$

c En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

► **(III)** On considère dans $]0,+\infty[$ l'équation $(E_n) : f_n(x) = 1$ où $n \geq 3$

1 a Vérifier que pour tout $n \geq 3$ on a : $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$

b En déduire que pour tout $n \geq 3$ on a : $y_n > 1$

c Montrer que (E_n) admet dans $]0,+\infty[$ exactement deux solutions 1 et une autre notée u_n

2 a Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et prouver que pour tout $n > e^2$ on a : $f_n(\sqrt{n}) > 1$

b En déduire que pour tout $n \geq 8$ on a : $u_n \geq \sqrt{n}$

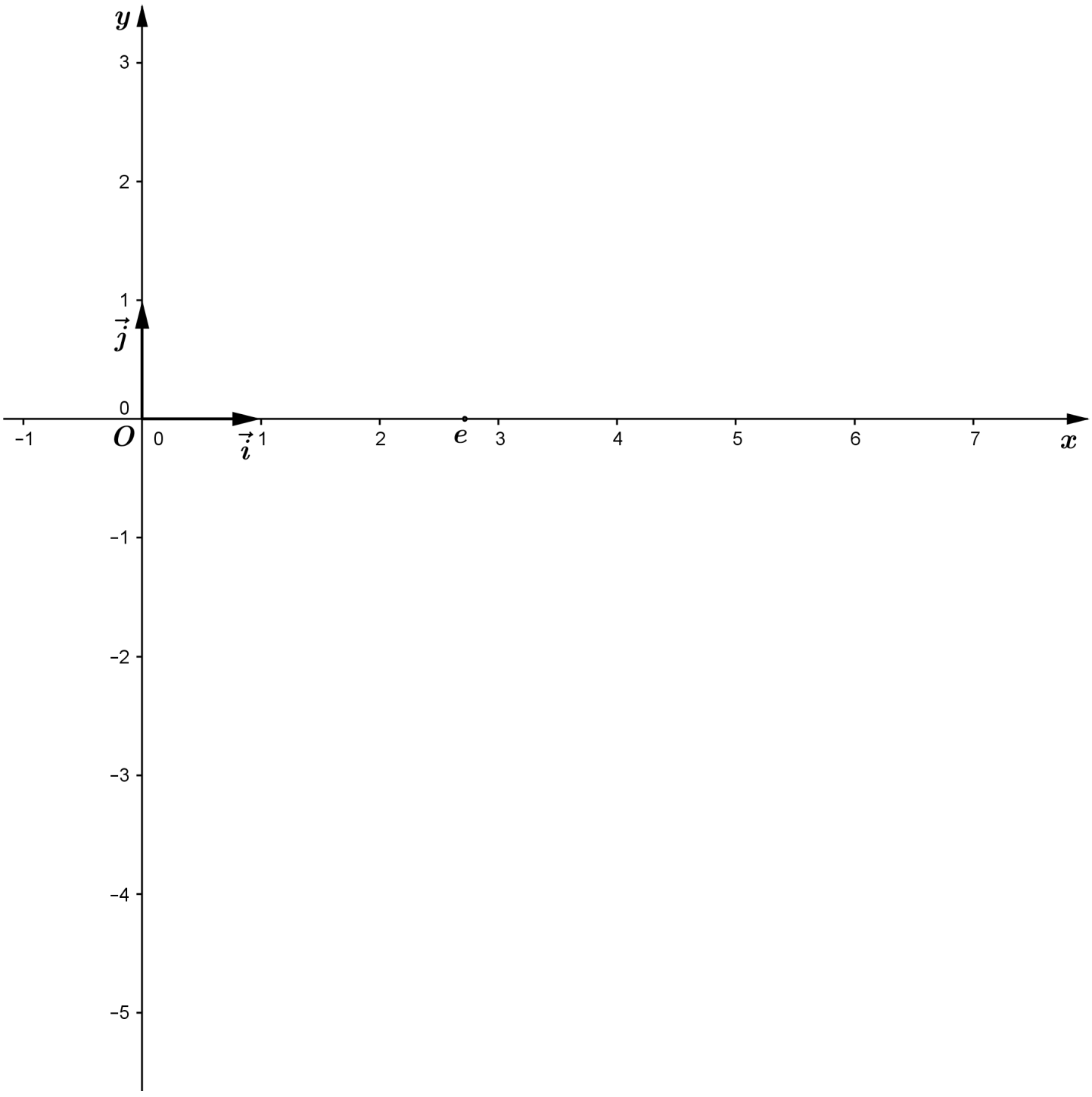
c Déterminer, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

http://mathematiques.kooli.me/

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom : ..... **Classe :** $4M$ ..... **N° :** .....

Exercice N°5 :



http://mathematiques.kooli.me/