4 Maths	DEVOIR DE SYNTHESE N°3(Bac Blanc)	06/05/2025
L.Sayada	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	Durée 4 heures

Exercice 1 (6 points)

A) Le plan est orienté dans le sens direct, on considère le triangle direct OAB isocèle et rectangle en O, on désigne par I, J et H les milieux respectifs des segments [OA], [OB] et [AB] et par C et K les symétriques respectifs des points B et I par rapport à O. **(Voir feuille annexe)**

1) Soit f la similitude directe qui envoie O sur A et A sur B.

a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

b) Montrer que f(I)=H et f(B)=C.

2) Soit Ω le centre de f.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de fof.

b) Préciser (fof)(O) et (fof)(A), prouver que $(\widehat{\Omega O}, \widehat{\Omega B}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$ *et* $(\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega C}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$ puis construire Ω.

3) Soit g la similitude indirecte qui envoie O sur A et A sur B.

a) Montrer que g=fo$S_{(OA)}$. En déduire g(C).

b) Déterminer alors, les éléments caractéristiques de g.

B) On munit le plan du repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$) où $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OJ}$.

1) a) Déterminer les écritures complexes de f et g.

b) Déterminer l'affixe de Ω et retrouver le centre de g par le calcul.

2) Soit l'équation (E_θ) : z²- (cosθ +2i sinθ +2i)z -4 sinθ+2i cosθ = 0 ; $\theta \in [-\pi, \pi]$.

a) Vérifier que z_B(affixe de B) est une solution de l'équation (E_θ) .

b) En déduire l'autre solution de l'équation (E_θ). (On la note z_M)

3) Soit M le point d'affixe z_M= cosθ +2i sinθ.

a) Vérifier que pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, M varie sur l'ellipse ($\mathcal{E}$)d'équation 4x²+y²=4.

b) Déterminer les foyers F et F' de ($\mathcal{E}$) et précises ses sommets. Construire ($\mathcal{E}$).

Exercice 2(4 points)

1) Soit, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : 7x + 11y = 1.

a) Vérifier que (-3, 2) est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E).

c) En déduire la valeur de u $\in$ {1, 2, …, 10} telle que $7u \equiv 1(mod\ 11)$.

http://mathematiques.kooli.me/

2) Soit les systèmes (S) : $\begin{cases} 7(x+4) \equiv 2(mod\ 11) \\ 4(x+4) \equiv 3(mod\ 7) \end{cases}$ et (S') : $\begin{cases} x \equiv 1(mod\ 11) \\ x \equiv 2(mod\ 7) \end{cases}$.

a) Montrer que les systèmes (S) et (S') sont équivalents.

b) Montrer que x est une solution de (S) si et seulement si $x \equiv 23(mod\ 77)$.

c) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système (S).

3) a) Vérifier que 2025 une solution de (S). En déduire les restes modulo 11 et 7 de 2025.

b) Montrer que pour tout n ϵ IN, on a : $(2025)^n \equiv 1(mod\ 11)$ et $(2025)^{3n} \equiv 1(mod\ 7)$. En déduire que $(2025)^{3n} - 1$ est divisible par 77.

Exercice 3(3 points)

Le tableau ci-dessous donne, pour les années indiquées, le nombre de livres imprimés par une maison d'édition pendant une période fixe. On désigne par (X, Y) la série statistique double, où X est le rang de cette période et Y est le nombre de livres imprimés.

Année	2014	2016	2018	2020	2022	2024
X_i	1	2	3	4	5	6
Y_i	1000	1320	n	2500	4300	6500

1) Le nombre moyen de livres imprimés, entre les années 2014 et 2024, est 2875. Déterminer alors la valeur de n.

2) On prendra dans la suite n=1630.

Représenter le nuage des points de cette série statistique et placer le point moyen G. **(Sur la feuille annexe)**

3) On pose Z = ln($\frac{Y}{4}$). **(dans la suite, arrondir les résultats au centième)**

a) Compléter le tableau de l'annexe.

b) Donner à 10^{-2} près par défaut, le coefficient de corrélation linéaire entre X et Z puis interpréter ce résultat.

c) Déterminer l'équation de la droite de régression D de Z en X.

d) Justifier qu'on peut modéliser le nombre de livres imprimés par y= α $e^{\beta x}$ dont on précisera les valeurs de α et β.

e) Estimer, à l'aide de cet ajustement, le nombre de livres imprimés 2028.

Exercice 4(7 points)

Soit n un entier naturel non nul (n ϵ IN*) et f_n la fonction définie par :

f_n(x) = n ln($\frac{\sqrt{x^2+n^2}+x}{n}$) et ($C_n$) sa courbe dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

http://mathematiques.kooli.me/

1) a) Justifier que f_n est définie sur IR puis montrer qu'elle est impaire.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 0$ puis interpréter graphiquement ces résultats.

c) Montrer que pour tout x ϵ IR ; $f_n'(x) = \frac{n}{\sqrt{x^2+n^2}}$ puis dresser le tableau de variation de f_n .

2) a) Former une équation de la tangente (T) à (C_n) en O.

b) Etudier le sens de variation de la fonction h_n définie sur IR par :

$h_n(x) = f_n(x) - x$, calculer $h_n(0)$ puis donner le signe de $h_n(x)$ sur IR.

c) En déduire la position de la courbe (C_n) par rapport à (T). Interpréter.

3) Soit la fonction φ_n définie sur IR par : $\varphi_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

a) Montrer que $\varphi_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{(\frac{x}{n+1})^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{(\frac{x}{n})^2+1}}$ puis déduire que φ_n est strictement croissante sur IR. Calculer $\varphi_n(0)$ puis donner le signe de $\varphi_n(x)$ sur IR.

b) En déduire la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}).

4) a) Montrer que f_n admet une fonction réciproque g_n définie sur IR.

(On note (C'_n) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

b) Exprimer $g_n(x)$ en fonction de x pour tout x ϵ IR puis vérifier que G_n est une primitive de g_n sur IR où $G_n(x) = \frac{n^2}{2}(e^{\frac{x}{n}} + e^{-\frac{x}{n}})$.

5) a) Tracer (C_1) et (C'_1) courbes respectives des fonctions f_1 et g_1 .

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=1.

6) Soit F la fonction définie sur IR par $F(x) = \int_0^{g_1(x)} f_1(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur IR et que $F'(x) = \frac{x}{2}(e^x + e^{-x})$.

b) Calculer F(0) puis établir que pour tout x ϵ IR ; $F(x) = 1 + \frac{1}{2}[(x-1)e^x - (x+1)e^{-x}]$.

c) Retrouver alors, l'aire $\mathcal{A}$.

7) Soit n ϵ IN* ; $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_1(\frac{k}{n})$ et $\mu = \int_0^1 f_1(x)dx$. (D= {1, 2, …, n})

a) Montrer que pour tout k ϵ D ; on a : $\frac{1}{n} f_1(\frac{k-1}{n}) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f_1(x)dx \leq \frac{1}{n} f_1(\frac{k}{n})$

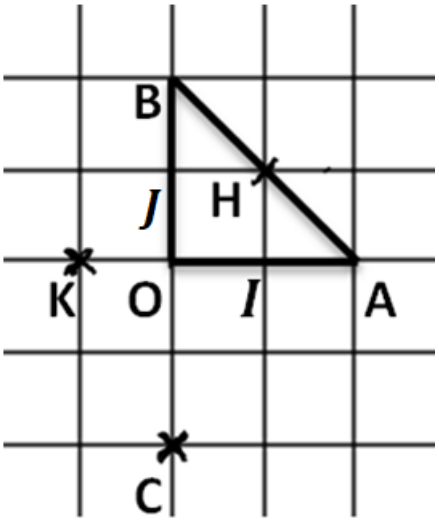
b) Montrer que pour tout n ϵ IN*, on a : $\mu \leq S_n \leq \mu + \frac{1}{n} f_1(1)$.

c) Calculer alors, $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

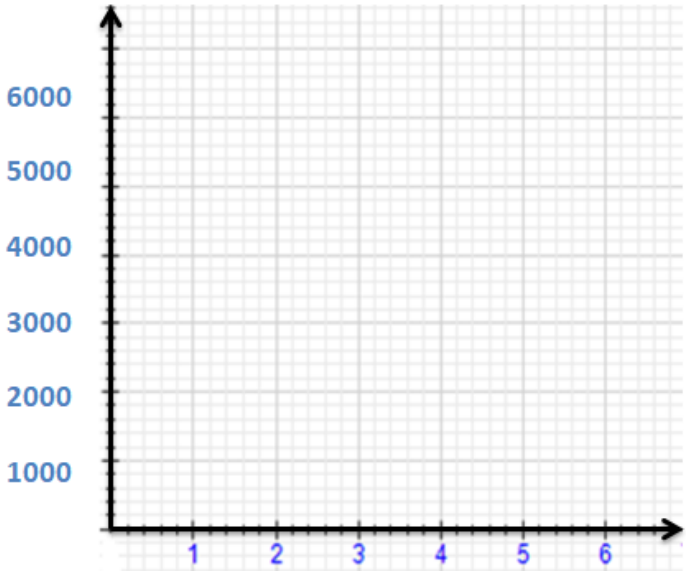
http://mathematiques.kooli.me/

Feuille annexe à rendre

Exercice 1



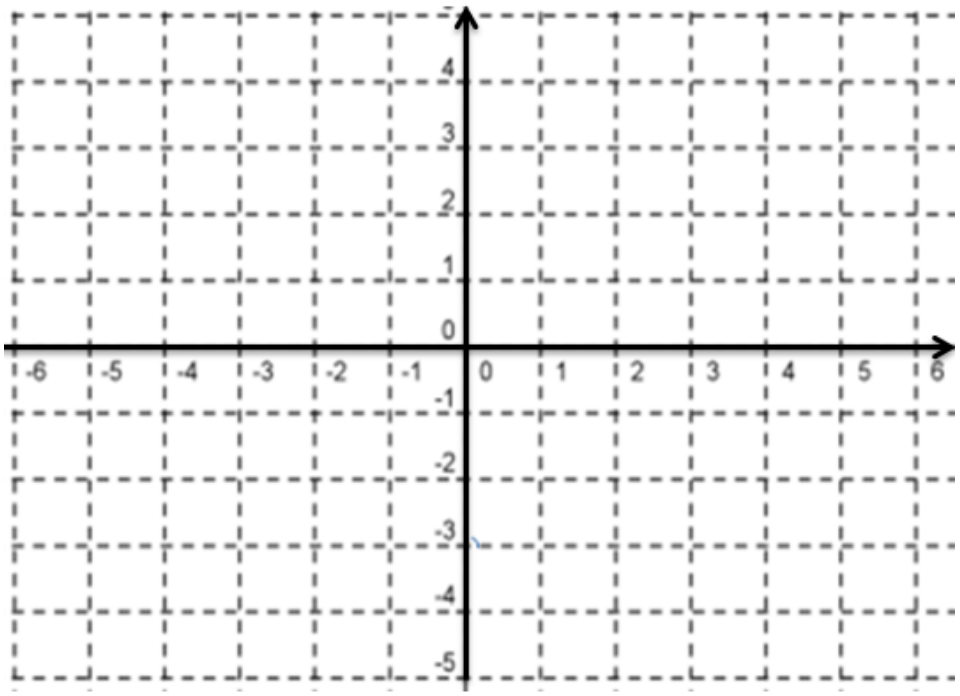
Exercice 3 (2)



Exercice 3 (3-a)

X_i	1	2	3	4	5	6
Z_i						

Exercice 4 (5-a)



http://mathematiques.kooli.me/