LYCEE SECONDAIRE KORBA
Prof: HMIDENE Nouredine

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°3
3^{me} maths

Exercise 1: (6 points)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points $A(0,0,1), B(-2,0,3), C(0,2,1)$ et $\Omega(0,1,3)$.

1. Montrer que ABC est un triangle rectangle en A puis calculer son aire $\mathscr{A}$.

2. a. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis vérifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}=(ABC)$ est : $x+z-1=0$.
   b. Montrer que ΩABC est un tétraèdre et calculer son volume $\mathcal{V}$.

3. Soit $(\mathcal{S})$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de $\mathscr{E}$ tel que :
$$x^2+y^2+z^2-2y-6z+5=0.$$
   a. Montrer que $(\mathcal{S})$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon R.
   b. Montrer que $\mathscr{P}$ coupe $(\mathcal{S})$ suivant un cercle (Γ) dont on précisera le rayon r.
   c. Montrer que $[BC]$ est un diamètre du cercle (Γ), puis déterminer les coordonnées de I centre de (Γ).
   d. Montrer que (ΩI) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.

4. Pour tout réel m, soit $(\mathcal{S}_m)$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que :
$$x^2+y^2+z^2-2(m-1)x-2y-2(m+2)z+2m+3=0.$$
   a. Montrer que $(\mathcal{S}_m)$ est une sphère dont on précisera le centre Ω_m et le rayon R_m.
   b. Montrer que $\Omega_m\in(\Omega I)$, puis déduire que toutes les sphères $(\mathcal{S}_m)$ contiennent le cercle (Γ).

Exercise 2: (6 points)

Une urne contient:
trois boules rouges numérotées $1,2,2$ et quatre boules noires numérotées : $0,1,1,2$.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne.Déterminer la probabilité des événements suivants
A : avoir 2 boules rouges.
B : avoir 2 boules de mêmes couleurs.

2. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.
   a. Déterminer la probabilité d'avoir **2** boules de mêmes couleurs.
   b. Déterminer la probabilité d'avoir 2 boules de mêmes parité.
   c. Déterminer la probabilité d'avoir au moins une boule qui porte le numéro 1.
   d. Déterminer la probabilité d'avoir une seule boule noire et une seule qui porte le numéro 1.

3 Un joueur tire successivement et avec remise de 3 boules de l'urne

a Déterminer la probabilité d'avoir une somme paire.

b Déterminer la probabilité d'avoir 3 boules de même couleurs ou 3 boules qui portent un numéro pair.

c Déterminer la probabilité d'avoir seulement 2 boules qui portent le numéro zéro.

Exercise 3: (4 points)

Soit la suite (U_n) définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{U_n}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 **a** Montrer que (U_n) est minorée par 3

b Étudier la monotonie de (U_n)

c Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite

2 **a** Montrer que $\forall n \in 10 : U_{n+1} \leqslant \frac{1}{3}U_n + 2$

b En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

c Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercise 4: (4 points)

(U_n) et (V_n) deux suites réelles vérifient: $0 < U_0 < V_0$

$$U_nV_n = U_0V_0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$V_n = \frac{1}{2}\left(U_{n-1} + V_{n-1}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1 **a** Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n > 0$ et $V_n > 0$

b Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$. $U_n < V_n$ puis déduire que (V_n) est décroissante et que (U_n) est croissante

c Montrer que ((U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes

2 **a** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : V_n - U_n \leqslant \frac{1}{2}\left(V_{n-1} - U_{n-1}\right)$

b En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$: $V_n - U_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(V_0 - U_0\right)$

c Montrer alors que (V_n) et (U_n) converge vers le même limite l puis calculer cette limite commune