RÉPUBLIQUE TUNISIENNE **MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION** **C . R DE L'EDUCATION DE TATAOUINE** ***LYCEE BIR LAHMAR – MAI 2024*** ●●○●● **PROF : GARI . HABIB**	**Épreuve : Mathématiques** ***Section : 3^{ieme}* Mathématiques** **DEVOIR DE SYNTHESE N°3** ***Durée :* 3H** — **Coefficient 4**

Exercice n°1 : **(3 points)**

Dans le tableau statique ci-dessous, la variable X désigne le nombre de jours après la naissance de nourrisson et la variable Y le poids en kilogrammes :

X (en jours)	4	6	9	14	17	19	22
Y (en kg)	3.7	3.75	3.80	3.90	4	4.35	4.5

1) a-Calculer la moyenne $\bar{X}$ et l'écart type σ_X de la variable X .
   b-Calculer la moyenne $\bar{Y}$et l'écart type σ_Y de la variable Y .
2) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points associés à la série (X ,Y)ainsi le point moyen G.
3) a – Déterminer les coordonnées des point moyen G_1 du nuage des points $M_1(x_1\,;y_1)$;$M_2(x_2\,,\,y_2)$ $M_3(x_3\,,\,y_3)$
   Déterminer les coordonnées du point moyen G2 du nuage M_4 , M_5 , M_6 et M_7 .
   b –En déduire une équation de la droite d'ajustement linéaire D de Y en fonction de X
4) Quelle pourrait être une estimation du poids du nourrisson après 30 jours de sa naissance ?

Exercice n°2 : **(4 points)**

I – 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $n\in \mathbb{N}^*$, $(x+1)^n - n x - 1$ est divisible par x^2 .
   2) En déduire le reste de la division euclidienne de 4^{2024} par 9.

II – Déterminer les nombres premiers p tels que p divise $8^p + 20$. (Utiliser le petit théorème de Fermat).

III – Soit $n\in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$. On pose $A = n - 1$ et $B= 5n^3 +7n$.
1) Développer : $(n+1)(5n^2+ 5n+ 12)$.
2) Montrer que $A \wedge B = A \wedge 12$.
3) Quelles sont les valeurs possibles de $A \wedge B$.
4) Pour quelles valeurs de n, le nombre $F = \frac{5n^3+7n}{n-1}$ est-il un entier naturel ?

Exercice n°3 : **(4 points)**

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher. .
1) On tire au hasard et simultanément 2 boules de l'urne Calculer la probabilité des évènements suivants :
   a) A : « avoir au moins une boule blanche » .
   b) B : « avoir 2 boules de couleur différentes ».
2) On tire maintenant au hasard et successivement avec remise deux boules.
 a) Calculer la probabilité des évènements A et B de la première question.
 b) On effectue n tirages successifs avec remise et on note p_k la probabilité d'avoir une boule blanche pour la première fois au k-ième tirage ($1\le k \le n$).
 i) Calculer : p_1 , p_2 et p_5.
 ii) Calculer : p_k ; avec ($1\le k \le n$).
iii) Déduire en fonction de n l'expression $S_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice n°4 : **(5 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on donne les points A(1,0, 2) ; B (0,1,2) et C (1,–2,0) et le plan Q d'équation cartésienne : $3x - 2y + z + 3 = 0$
1) a) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
   b) Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P
   c) Déduire qu'une équation cartésienne de P est $x + y - z +1 = 0$
2) a) Montrer que P et Q sont perpendiculaires
   b) Donner une représentation paramétrique de la droite $D = P \cap Q$
3) a) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonale du point I (1, 2, –2) sur le plan P
   b) Vérifier que la distance du point I au plan P est égal à $2\sqrt{3}$
4) Soit l'ensemble $S = \{M\,(x\,,\,y\,,\,z\,)\in\xi \,/\, x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 18 = 0\}$
   a) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon
   b) Montrer que S et P sont sécants en un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice n°5 : **(5 points)**

I. 1)Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+8}}$

a) Montrer que f est une fonction impaire

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ Interpréter graphiquement le résultat obtenu

2)a) Montrer que f est dérivable et que pour tout rée x $f'(x)=\frac{16}{\sqrt{x^2+8}^3}$

b) Dresser alors le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

c) Justifier que $\forall x\in[0,2]\ ,0\le f(x)\le 2$

3) Montrer que pour tout réel x : $f(x)-x=-\frac{x(x^2+4)}{\sqrt{x^2+8}\left(2+\sqrt{x^2+8}\right)}$.

En déduire que : $f(x)\le x\ \ \forall x\in[0,2]$.

II. Soit (U_n) la suite définie par $U_0=2$ *et pour tout entier naturel n* $U_{n+1}=\frac{2\,U_n}{\sqrt{U_n^2+8}}$

1) a) Montrer que pour tout n $\in$ IN ; $0\le U_n\le 2$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

2) Soit (V_n) la suite définie pour tout n $\in$ IN par ; $V_n=1+\frac{4}{U_n^2}$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison 2.

b) En déduire V_n et U_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

3) On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{U_n^2}$ et $W_n=\frac{S_n}{2^{2n+2}}$

a) Montrer que $S_n=2^{n+2}-n-3$

b) Montrer que $0<W_n<\frac{1}{2^n}$ en déduire $\lim_{n\to+\infty} W_n$.