

Ministère de l'éducation	Epreuve : Mathématiques	3 ^{ème} Année
Commissariat régional de l'éducation - Manouba	Devoir de synthèse N° 3	Section : Mathématiques
Année Scolaire : 2024/2025	Durée : 3 heures	Date : 23-05-2025

Le sujet comporte quatre pages numérotées de 1 / 4 à 4 / 4

La pages 4 / 4 et à rendre avec la copie.

EXERCICE N°1 : (3 points)

Répondre aux questions suivantes qui sont largement independates

- 1) Soit n un entier naturel non nul , montrer que $12n^2 - n - 1$ est un nombre composé.
- 2) Soit A et B deux événements d'une même experience aléatoire et p une probabilité sur l'univers E des isues possibles tels que:
 $p(\bar{A}) = 0,8$, $p(B) = 0,4$ et $p(A \cup B) = 0,5$.
Calculer $p(A \cap B)$.
- 3) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux et unitaires de $\mathcal{W}$.
Que peut-on dire des vecteurs $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{s} = \vec{u} - \vec{v}$? Justifier votre réponse.
- 4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x) + 2 \sin x$
Montrer que $f'(x) = 2(2\cos(x) - 1)(1 + \cos x)$

EXERCICE N°2 : (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère:

- Les points $A(1,1,1)$ et $B(3,2,0)$
 - Le plan $(\mathcal{P})$ passant par B et admettant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal.
 - Le plan $(\mathcal{Q})$ d'équation: $x - y + 2z + 4 = 0$
 - La sphère $(\mathcal{S})$ de centre A et de rayon AB .
- 1) Montrer qu'une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est : $2x + y - z - 8 = 0$.
 - 2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère $(\mathcal{S})$.
 - 3) a. Calculer la distance du point A au plan $(\mathcal{Q})$. En déduire la position relative du plan $(\mathcal{Q})$ et la sphère $(\mathcal{S})$.
b. Le plan $(\mathcal{P})$ est-il tangent à la sphère $(\mathcal{S})$?
 - 4) a. Montrer que le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{Q})$ est le point C de coordonnées $(0, 2, -1)$.
b. Prouver que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont sécants.
c. Soit $\Delta = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, montrer qu'une représentation paramétrique de la droite
 Δ est:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

d. Vérifier que le point A n'appartient pas à Δ et déterminer la distance du point A à la droite Δ .

- 5) On appelle $(\mathcal{R})$ le plan défini par le point A et la droite Δ . L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse :
- « Tout point du plan $(\mathcal{R})$ est équidistant des points B et C ».
- Justifier votre réponse .

EXERCICE N°3 : (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a \cos(2x) + b \cos x$; où a et b deux réels tels que $b \neq 0$

- 1) a. Montrer que f est paire
 b. Montrer que f est périodique de période 2π .
 c. Dédurre qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$
- 2) Dans la figure de l'annexe on a tracé la courbe de la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$ ainsi que les deux demi-tangentes aux points d'abscisse 0 et π et la tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A .
 a. En utilisant le graphique déterminer $f(0)$, $f(\pi)$ et $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x)-3}{x-\pi}$.
 b. Dédurre que $f(x) = \cos(2x) - 2 \cos x$
- 3) a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \sin(x) \cdot (1 - 2 \cos x)$.
 b. Dédurre que A a pour coordonnées $(\frac{\pi}{3}, -\frac{3}{2})$.
- 4) Compléter sur la feuille annexe la représentation graphique de la restriction de f sur l'intervalle $[-2\pi, \frac{3\pi}{2}]$.
- 5) On considère la fonction g définie sur $] -\pi, \pi[$ par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)+1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

 a. Montrer que pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \frac{2 \cos x (\cos(x)-1)}{\sin x}$
 b. Montrer que g est continue en 0 .
 c. Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -1$
 d. Donner alors une approximation affine du réel $g(\frac{\pi}{2025})$.

EXERCICE N°4 : (3 points)

- 1) Une urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. Une épreuve consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne U_1 .
 Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:
 o A « obtenir deux boules de même couleur »
 o B « au moins une boule noire figure dans le tirage »
- 2) On dispose à présent d'une deuxième urne U_2 qui contient aussi des boules blanches et des boules noires telles que la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne U_2 est égale à 0,3.
 a. Déterminer la probabilité de tirer une boule noire
 b. On procède maintenant à un tirage successif d'une boule de U_1 puis une boule de U_2 .
 i. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche puis une boule noire.
 ii. Montrer que la probabilité de tirer deux boules de même couleur est égale à 0,54.

EXERCICE N°5 : (4 points)

I)

- 1) a. Vérifier que l'entier 251 est premier et donner la décomposition en facteurs premiers de chacun des entiers 250 et 252 .
b. Justifier que $251^4 - 1 = 2^3 \times 5^3 \times 3^2 \times 7 \times (251^2 + 1)$ et déduire que $251^4 - 1$ est divisible par 1000.
- 2) a. Montrer que $251^{20} - 1$ est divisible par 1000
b. Déterminer les trois derniers chiffres de l'entier $A = 251 + 251^{20} + 251^{40}$.

II)

Soit dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_p): p x + y^{p-1} = 251$; où p est un nombre premier supérieur ou égal à 5.

- 1) Vérifier que $p < 251$.
- 2) a. On note $d = p \wedge y$, montrer que d divise 251
b. En déduire que $d = 1$
- 3) a. Montrer que p divise $y^{p-1} - 1$ puis déduire que p divise 250
b. Montrer que $p = 5$
- 4) Soit (x, y) une solution de $(E_5): 5x + y^4 = 251$
a. Vérifier que $y^4 < 251$
b. Déduire les couples (x, y) solutions de (E_5) .

Annexe à rendre avec la copie

Nom et Prénom :

Figure

