L. P. Kairouan	Devoir de synthèse N°3	Prof: Chouihi
Le : 08 - 05 - 08	Durée : 4heures	Classes: $4M_{1+3}$

Exercice N°1 (4 points)

Partie A

Pour chacune des propositions suivantes une et une seule réponse est correcte ; noter sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la bonne réponse.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) Soit l'hyperbole $\mathcal{H}$ de centre O, de sommet S(3,0) et de foyer F(5,0) ; $\mathcal{H}$ a pour équation réduite:

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16} \quad 1$ c) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

2) La parabole de foyer F(2,0) et de directrice D : x = - 2 a pour équation :

a) $y^2 = 4x$ b) $x^2 = 8y$ c) $y^2 = 8x$

3) Soit S l'application du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = 2i\bar{z} \quad 1-i$.

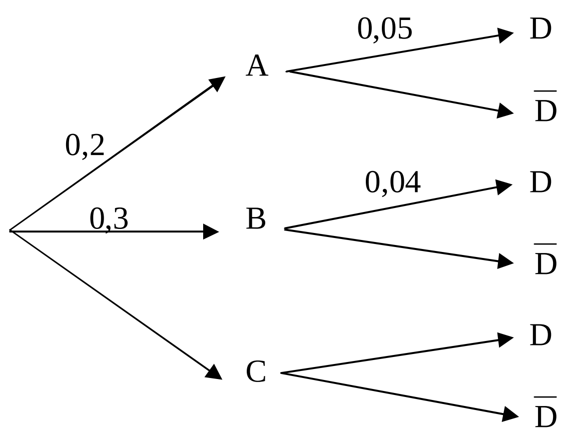
a) S est une similitude directe de rapport 2, de centre A(1– i) et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

b) S = h o S_Δ où h est l'homothétie de rapport 2 et de centre A(1–i) et S_Δ est la symétrie axiale d'axe $\Delta : y = -x$.

c) S est une similitude indirecte de rapport 2, de centre A(1– i) et d'axe $\Delta : y = x$.

Partie B

On donne l'arbre de probabilités suivant tel que P(D) = 0,027



a) Déterminer P $(A \cap D)$, P $(B \cap D)$, en déduire P $(C \cap D)$
b) Recopier sur votre copie l'arbre de probabilités et la compléter.
c) Déterminer P(C / D)

Exercice N°2 (4 points)

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société fait contrôler les chaudières pendant l'été. Des études statistiques menées donnent les résultats suivants :

- 20% des chaudières sont sous garantie.
- Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de 0,01.
- Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de 0,1. On appelle G l'événement suivant : « La chaudière est sous garantie ».

1) Calculer la probabilité des événements suivants :

   A « La chaudière est sous garantie et défectueuse »

   B « La chaudière est défectueuse »

2) On sait que la chaudière est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle soit sous garantie.

3) Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie, il coûte 20 dinars si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse, il coûte 200 dinars si la chaudière n'est plus sous garantie et défectueuse. On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière.
   Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

Exercice N°3 (4 points)

Dans l'espace $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$), on donne les points A(0 ;3 ;0) et B(0 ;0 ;4) et C(2, 0, 4).

1) a) Montrer que la droite (BC) est orthogonale à la droite (OA).
   b) Montrer que la droite (BC) est orthogonale à la droite (OB).
   c) En déduire que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OAB).

2) Déterminer le volume du tétraèdre OABC.

3) Montrer que les points O, A, B et C se trouvent sur une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

4) A tout réel $k \in]0, 4[$ on associe le point M(0,0,k).
   Le plan contenant M et orthogonal à l'axe (O, $\vec{k}$) coupe les droites (OC), (AC) et (AB) respectivement en N, P et Q.
   a) Montrer que le quadrilatère MNPQ est un rectangle.
   b) Pour quelle valeur de k la droite (PM) est elle orthogonale à la droite (AC) ?

Problème (8 points)

A. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1°) a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Tracer la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) a) Montrer que f est une bijection de IR sur] – 1,1 [.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$; pour tout $x \in$] – 1,1 [.

c) Construire la courbe ($\mathcal{C}$ ') de f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$..

3°) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$ '), l'axe des ordonnées et la droite d'équation : y = 1.

4°) a) Montrer que pour tout $x \in IR$, $[f(x)]^2 = 1 - \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

b) Soit $\Gamma = \{M(x,y) \in P$ tels que : $y = f(x)$ et $0 \le x \le 1\}$ et S le solide obtenu par rotation de Γ autour de l'axe des abscisses. Calculer le volume de S.

B. On considère les ensembles :

$$\mathcal{E} = \left\{ M(x,y) \in P ; \begin{cases} x = 5\,\dfrac{(e^t - e^{-t})}{e^t + e^{-t}} \\ y = \dfrac{6}{e^t + e^{-t}} \end{cases} ,\quad t \in IR \right\} \text{ et } \mathcal{H} = \left\{ M(x,y) \in P ; \begin{cases} x = 3\dfrac{(e^t + e^{-t})}{2} \\ y = 2(e^t - e^{-t}) \end{cases} ; t \in IR \right\}$$

1°) Pour tout réel t, on pose : $u(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $v(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Pour tout réel t, établir les égalités :

a) $[u(t)]^2 - [v(t)]^2 = 1$ b) $[f(t)]^2 + \dfrac{1}{[u(t)]^2} = 1$

2°) a) Montrer que $\mathcal{E}$ a pour équation : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{H}$.

3°) Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives : 1, 1 + i, i et – 1 + i.

a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R transformant A en C et B en D.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de R.

4°) a) Déterminer, par son équation cartésienne, l'ensemble $\mathcal{E}$' image de $\mathcal{E}$ par R.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}$'.

Fin

Exercice N°1

Partie A

1) a)

2) c)

3) b)

Commentaire pour 3)

- S est une similitude indirecte (de la forme $z' = a\bar{z} + b$)
- De rapport $|-2i| = 2$
- De centre A car $z_{A'} = z_A$
- D'axe $\Delta = \{M \in P \text{ tel que } S(M) = h(M)\}$

NB : on peut procéder par élimination !

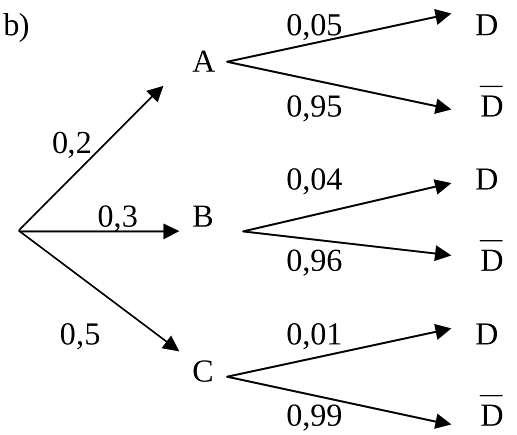
Partie B

a) $p(A \cap D) = p(A).p(D/A) = 0,2 \times 0,05 = 0,01$

$p(B \cap D) = p(B).p(D/B) = 0,3 \times 0,04 = 0,012$

$p(C \cap D) = p(D) - p(A \cap D) - p(B \cap D) = 0,005$

b)



c) $p(C/D) = \dfrac{p(C \cap D)}{p(D)} = \dfrac{5}{27}$

Exercice N°2

1) $p(A) = p(G \cap D) = p(G) \times p(D/G) = 0,2 \times 0,01 = 0,002$

$P(B) = p(D) = p(G) \times p(D/G) + p(\overline{G}) \times p(D/\overline{G}) =$

$0,002 + 0,8 \times 0,1 = 0,082$

2) $p = p(G/D) = \dfrac{p(G \cap D)}{p(D)} = \dfrac{2}{82} = \dfrac{1}{41} \approx 0,0243$

3) $X(\Omega) = \{0, 20, 200\}$

$p(X = 0) = p(G) = 0,2$

$p(X = 20) = p(\overline{G} \cap \overline{D}) = p(\overline{G}) \times p(\overline{D}/\overline{G})$

$= 0,8 \times 0,9 = 0,72$

$P(X = 200) = p(\overline{G} \cap D) = p(\overline{G}) \times p(D/\overline{G})$

$= 0,8 \times 0,1 = 0,08$

$E(x) = 20 \times 0,72 + 200 \times 0,08 = 30,4$

Exercice N°3

1) a) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = 0$ donc $(BC) \perp (OA)$.

b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = 0$ donc $(BC) \perp (OB)$.

c) $\begin{cases}(BC) \perp (OA)\\(BC) \perp (OB)\\(OA) \text{ et } (OB) \text{ sont sécantes}\end{cases}$ alors $(BC) \perp (OAB)$

2) En remarquant que OAB est rectangle en O et en tenant compte du fait que $(BC) \perp (OAB)$ on déduit que :

$V(OABC) = \dfrac{1}{6} OA \times OB \times BC = 4$

3) Soit $\Omega(x,y,z)$

$\begin{cases}A\Omega = O\Omega\\B\Omega = O\Omega\\C\Omega = O\Omega\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6y + 9 = 0\\-8z + 16 = 0\\-4x - 8z + 20 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \Omega(\frac{3}{2}, 2, 1)$

$R = O\Omega = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$

4) a) $N(\frac{k}{2}, 0, k)$; $P(\frac{k}{2}, -\frac{3}{4}k + 3, k)$ et

$Q(0, -\frac{3}{4}k + 3, k)$

Il suffit de vérifier que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ et que $\overrightarrow{MN} \bullet \overrightarrow{MQ} = 0$.

b) $k = \dfrac{36}{13}$

Problème

1) a) $D_f = IR$.

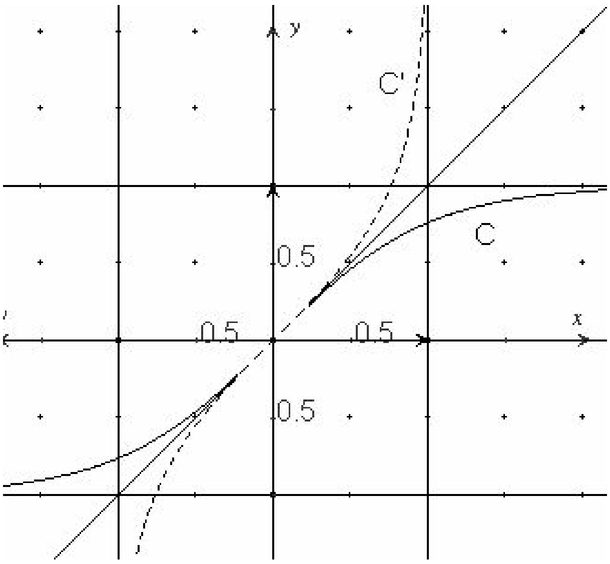
f est continue et dérivable sur IR

$f(x) = \dfrac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ donc $\lim\limits_{-\infty} f = -1$

$f(x) = \dfrac{e^{x}(1 - e^{-2x})}{e^{x}(1 + e^{-2x})} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = 1$

$f'(x) = \dfrac{4}{(e^{x} + e^{-x})^2} \succ 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f'(x)	+
f(x)	$-1 \nearrow 1$



2) a) f est strictement croissante sur IR donc elle réalise une bijection de IR sur f<IR> et comme f est continue sur IR alors f<IR> = $]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f[$

$=]-1, 1[$

b) $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in]-1,1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in IR \end{cases}$

$f(y) = x \Leftrightarrow \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \Leftrightarrow e^y(1 - x) = e^{-y}(1 + x)$

$\Leftrightarrow e^{2y}(1 - x) = 1 + x \Leftrightarrow e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$

$\Leftrightarrow 2y = \ln(\dfrac{1+x}{1-x})$

donc $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$

c) C' est l'image de C par rapport à Δ : y = x

3) par raison de symétrie par rapport à Δ, l'aire A demandé est égal à celui de la partie limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et la droite d'équation : x = 1 ; donc

$A = \int_0^1 f(x)dx = \left[\ln(e^x \quad e^{-x}+)\right]_0^1 \quad \ln(e \quad e^{-1}) \quad \ln 2 \quad +$

4) a) $[f(x)]^2 = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} \quad e^{-2x} + \quad 2 \quad -}{e^{2x} \quad e^{-2x} + \quad 2 \quad +}$

$= \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} \quad 2 \quad 4}{e^{2x} + e^{-2x} \quad 2} \quad 1 \quad \dfrac{4}{e^{-2x}(e^{4x} \quad 1 + 2e^{2x})}$

$= 1 - \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$

b) $V = \pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1 (1 - \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2})dx$

$= \pi\left[x + \dfrac{2}{e^{2x}+1}\right]_0^1 = \dfrac{2\pi}{e^2+1}$

B.

1) a) et b) simple calcul !

2) a) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = f(t) \\ \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{u(t)} \end{cases}$ et comme $[f(t)]^2 + \dfrac{1}{[u(t)]^2} = 1$

donc $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

E est une ellipse de foyer F(4,0) de directrice associée à F la droite D : x = $\dfrac{25}{4}$ et d'excentricité e = $\dfrac{4}{5}$.

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = u(t) \\ \dfrac{y}{4} = v(t) \end{cases}$ et comme $[u(t)]^2 - [v(t)]^2 = 1$ donc

$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

H est une hyperbole de foyer F(5,0), de directrice associée à F la droite D': x = $\dfrac{9}{5}$.

3) a) AB =1 & CD = 1

[AB = CD & AB$\neq$ 0] donc il existe un unique déplacement R transformant A en C et B en D.

b) La transformation complexe associée à R est de la forme z' = az + b avec $|a| = 1$

$\begin{cases} R(A) = C \\ R(B) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = i \\ a(1+i) \quad b = 1 \quad i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = i \\ b = 0 \end{cases}$

Donc z' = iz et par suite R est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

4) a) M' = R(M) $\Leftrightarrow$ z' = iz $\Leftrightarrow$ z = -iz'

$\Leftrightarrow$ x + iy = -i(x' + iy') $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$

$M \in E \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{25} = 1$

Donc E' a pour équation : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

b) E' est une ellipse de foyer F'(0,4), de directrice associée à F' la droite d'équation : y = $\dfrac{25}{4}$ et d'excentricité e = $\dfrac{4}{5}$.