



Exercice N°1 :

1,5 points

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soit le nombre complexe : $z = 2 + i(6 - 6i)$

a) $|z| = 10$

b) $\bar{z} = 2 - i(6 - 6i)$

c) $z\bar{z} = -100$.

2) L'image dans le plan complexe du nombre $z = (1 + i)^{2010}$ appartient à :

a) l'axe des réels.

b) l'axe des imaginaires purs

c) la droite d'équation $y = x$.

3) Soit le nombre complexe $Z = \frac{z_1}{z_2}$, on donne $Z = \left[4, \frac{\pi}{12}\right]$ et $z_1 = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$ alors :

a) $z_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{12}\right]$.

b) $z_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

c) $z_2 = \left[2, \frac{\pi}{4}\right]$.

Exercice N° 2:

3 points

Un sac contient 9 boules : 4 rouges numérotées : - 2 ; 2 ; 2 ; 2 .

5 noires numérotées : - 2 ; 0 ; 0 ; 0 ; 2 .

1) On tire **simultanément deux** boules du sac.

On considère les événements suivants :

A : « les deux boules tirées sont de même couleur »

B : « le produit de deux numéros obtenus est égal à 4 »

Calculer $\text{card}(A)$, $\text{card}(B)$ et $\text{card}(A \cup B)$

2) On tire maintenant **successivement et sans remise trois** boules du sac

On considère les événements suivants :

C : « la somme de trois numéros obtenus est égale à 0 »

D : « une boule numérotée 0 apparaitre pour la première fois au 2^{ème} tirage »

Calculer $\text{card}(C)$ et $\text{card}(D)$

Exercice N° 3:

6,5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1+i)z + 2$.

1) Soit A le point d'affixe $z_A = -2 + 2i$.

Déterminer les affixes des points A' et B vérifiant respectivement : $A' = f(A)$ et $f(B) = A$.
(on donnera les résultats sous forme algébrique).

2) a – Montrer qu'il existe un unique point invariant I par f dont l'affixe est $2i$.

b – Etablir que, pour tout nombre complexe z distinct de z_I , $\frac{z' - z}{z_I - z} = -i$.

c – Démontrer que : $\arg\left(\frac{z' - z}{z_I - z}\right) \equiv (\widehat{MI, MM'}) [2\pi]$.

d – Interpréter géométriquement le nombre $\left| \frac{z' - z}{z_I - z} \right|$.

e – Soit M un point distinct de I .

Comparer MM' et MI et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MM'})$

f – Soit E le point d'affixe $z_E = -\sqrt{3} - i$.

- Ecrire z_E sous forme trigonométrique.
- Placer les points A, B, I, A' et E sur la même figure (page 4 annexe).
- Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E .

3) a – Déterminer l'ensemble $\Gamma = \{M \in P / |z + 2 - 2i| = \sqrt{2}\}$.

Vérifier que B est un point de Γ .

b – Démontrer que, pour tout nombre complexe z : $z' + 2 = (1+i)(z + 2 - 2i)$.

c – En déduire que si M est sur un cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, M' est sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice N° 4:

5 points

I – On considère le système suivant $S : \begin{cases} a^2 + b^2 = 4625 \\ a \vee b = 440 \end{cases}$

1) Déterminer D_{4625} et D_{440} .

2) Soit $d = a \wedge b$

a – Montrer que $d = 1$ ou $d = 5$.

b – Résoudre dans \mathbb{N}^2 , le système S .

II – Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) *a* – Montrer par récurrence sur n , que $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

b – En déduire que $3^{2n+1} - 3$ est divisible par 8.

c – Déterminer alors les restes de la division par 8 des nombres 3^{2n} et 3^{2n+1} .

d – Déterminer les restes de la division par 8 des nombres 3^{2011} et $5 \times 3^{2000} + 2$.

2) Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre A_p défini par :

$$A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$$

a – Si $p = 2n$, quel est le reste de la division de A_p par 8.

b – Démontrer que, si $p = 2n + 1$, A_p est divisible par 8.

Exercice N° 5:

4 points

Soient les fonctions f et g définies par : $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

$$\text{et } g(x) = 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x$$

On désigne par (C) et (Γ) les courbes représentatives respectives de f et g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que la droite Δ d'équation : $x = \frac{2\pi}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe (C) .

2) *a* – Déduire que l'on peut étudier f sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

b – Dresser le tableau de variation de f sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

c – Construire la courbe (C') de restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$. (page 4 annexe)

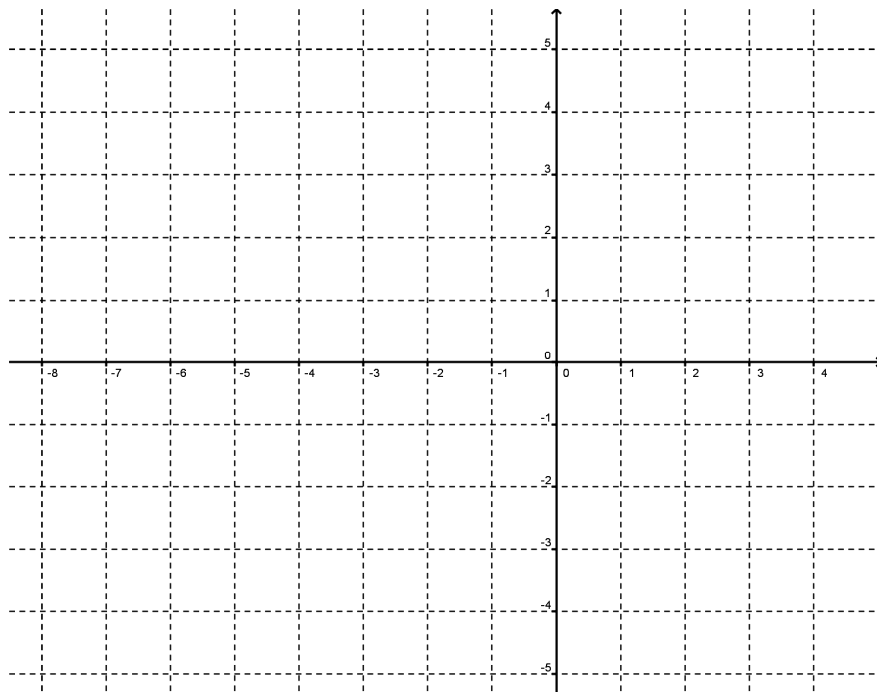
3) *a* – Montrer qu'il existe un réel k tel que pour tout réel x , $g(x) = f(x) + k$

b – Construire, à partir de (C') , la courbe (Γ') de la restriction de g à l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$.

Annexe

Nom : Prénom :

Exercice N° 3:



Exercice N° 5:

