DEVOIR DE CONTROLE N°03

Exercice N°01 ☹ *(2 pts)*

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience .
Completer le tableau suivant:

Langage ensembliste	Langage probabiliste
A : une partie de Ω	A ……………………………………..
$A=\Omega$	A ……………………………………..
A ……………………………………..	A est l'évènement impossible
$\{e\}$ est un singleton , $\{e\}\subset\Omega$	$\{e\}$ ……………………………………..
$A\cup B$ ……………………………………..	$A\cup B$ est l'évènement « A ou B »
$A\cap B$ ……………………………………..	$A\cap B$ est l'évènement « A et B »
$\overline{A}=C_{\Omega}^{A}$ est le complémentaire de A dans Ω	$\overline{A}$ ……………………………………..
Si $A\cap B=\varnothing$ A et B …………………………………	A et B sont deux évènements incompatibles

Exercice N°02 ☹ *(7 pts)*

Une urne contient 6 boules : 3 numérotées 1 , 2 numérotées 2 et une numérotées 3. On tire une première boule au hasard puis sans remettre cette boule on tire une seconde boule au hasard .
Le résultat d'un tel tirage est le couple (a,b) où a et b sont les nombres inscrits sur la première et la seconde boule .

1/ Calculer la probabilité de chaque résultat possible .

2/ Calculer la probabilité des évènements suivants :

a) A : « les deux numéros tirés sont égaux $(a=b)$ ».

b) B : « le premier nombre tiré est strictement supérieur au second $(a>b)$ » .

c) C : « le premier nombre tiré est inférieur au second $(a\leq b)$» .

3/ On note X la valeur absolue de la différence de deux nombres tirés $(X = |a-b|)$.

a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X ?

b) Pour tout élément i de E, calculer la probabilité de l'évènement $(X = i)$.

Exercice n° 03 ☹ (6 pts)

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{U_n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/ Montrer que $U_n \geq 1 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2/ Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $2 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 2 + U_{n+1} - U_n$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n + U_n - 1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Exercice N°04 ☹ (5 pts)

On se propose de résoudre l'équation $(E) : 3x^2 - 7y^2 = 4$ dont les inconnues x et y sont deux entiers naturels.

1/ On suppose que (x, y) vérifie $3x^2 - 7y^2 = 4$.

Montrer que $y^2 \equiv 2[3]$

2/a) Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}$, on a : $a^2 \equiv 0[3]$ ou $a^2 \equiv 1[3]$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Bon Travail ......✍