

Exercice N° 1 (6 points)

n désigne un entier naturel.

I/ 1°) Montrer par récurrence que $2^{3n} - 1$ est divisible par 7

2°) Déduire le reste de la division euclidienne de $2^{3n} + 5$ par 7

II/1°) a- Montrer que $(n - 1) \cup (n + 3) = (n + 3) \cup 4$ pour tout $n > 1$.

b- Quelles valeurs peuvent prendre le pgcd de $(n - 1)$ et $(n + 3)$?

2°) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $(n - 1)$ divise $(n + 3)$.

3°) a-Développer $(n-1)(n+3)$

b- Montrer que pour tout $n > 1$, les entiers $(n - 1)$ et $n^2 + 2n - 2$ sont premiers entre eux.

4°) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $(n - 1)(2n + 1)$ divise $(n + 3)(n^2 + 2n - 2)$.

Exercice N° 2 (7 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin^2 x \cos(2x)$.

on note γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1°) a-Montrer que f est périodique de période p

b-Montrer que l'on peut étudier f sur $[0; \frac{p}{2}]$

2°) Montrer que $f'(x) = \sin 2x (2\cos 2x - 1)$

3°) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \frac{p}{2}]$

4°) Tracer la partie de γ dans $[-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}]$

5°) Etudier la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$

Exercice N° 3 (7 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative ρ de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{2+x^2}$ et la tangente T à ρ en O d'équation : $y = x$

1°) Soit la suite V définie sur \mathbb{N}^* par $V_n = \frac{n}{2+n^2}$

a- Pour $n < 5$; représenter les points $A_n(n; V_n)$

b- Etudier les variations de V

c- la suite V est elle convergente

2°) On considère la suite U définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a- Montrer par récurrence que : " $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$ "

b- Etudier les variations de U

c- Montrer que $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

d- Montrer que " $n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{1}{2^n}$ "

e- Déterminer la limite de la suite U

