

**Exercice N° 1 (6 points)**

$n$  désigne un entier naturel.

I/ 1°) Montrer par récurrence que  $2^{3n} - 1$  est divisible par 7

2°) Déduire le reste de la division euclidienne de  $2^{3n} + 5$  par 7

II/1°) a- Montrer que  $(n - 1) \cup (n + 3) = (n + 3) \cup 4$  pour tout  $n > 1$ .

b- Quelles valeurs peuvent prendre le pgcd de  $(n - 1)$  et  $(n + 3)$  ?

2°) Déterminer l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $(n - 1)$  divise  $(n + 3)$ .

3°) a-Développer  $(n-1)(n+3)$

b- Montrer que pour tout  $n > 1$ , les entiers  $(n - 1)$  et  $n^2 + 2n - 2$  sont premiers entre eux.

4°) Déterminer l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $(n - 1)(2n + 1)$  divise  $(n + 3)(n^2 + 2n - 2)$ .

**Exercice N° 2 (7 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin^2 x \cos(2x)$ .

on note  $\gamma$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1°) a-Montrer que  $f$  est périodique de période  $p$

b-Montrer que l'on peut étudier  $f$  sur  $[0; \frac{p}{2}]$

2°) Montrer que  $f'(x) = \sin 2x (2\cos 2x - 1)$

3°) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; \frac{p}{2}]$

4°) Tracer la partie de  $\gamma$  dans  $[-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}]$

5°) Etudier la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$

### Exercice N° 3 (7 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative  $\rho$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{2+x^2}$  et la tangente  $T$  à  $\rho$  en  $O$  d'équation :  $y = x$

1°) Soit la suite  $V$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $V_n = \frac{n}{2+n^2}$

a- Pour  $n < 5$ ; représenter les points  $A_n(n; V_n)$

b- Etudier les variations de  $V$

c- la suite  $V$  est elle convergente

2°) On considère la suite  $U$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a- Montrer par récurrence que : " $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$ "

b- Etudier les variations de  $U$

c- Montrer que  $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

d- Montrer que " $n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{1}{2^n}$ "

e- Déterminer la limite de la suite  $U$

