L.P.El Manehel.Monastir | A.S :2023/2024

Devoir de Contrôle N°3

Mathématiques | Classes 4ème sc

Mr Zrafi Karim | Durée : 2.h

Exercice N°1: (6 pts)

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.

Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8

On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre

1/ On soumet au test une personne pris au hasard et on considère les évènements suivants
M : « la personne a pris le médicament »
B : « le taux de glycémie est baissé »

a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation précédente.
b) Quelle est la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie chez une personne ait pris le médicament
c) Montrer que p(B) = 0,52
d) On constate une baisse du taux de glycémie. Quelle est la probabilité que la personne choisie ait pris le médicament.

2/ Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur l'efficacité de ce médicament.
On contrôle n individus pris au hasard.
Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98

3/ Une personne diabétique utilise un stylo-injecteur réutilisable pour injecter deux fois par jour une quantité d'insuline d'action prolongée.

La durée de vie, en année, d'un stylo est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,125$.

a) Calculer la probabilité pour qu'un stylo tombe en panne au bout de trois ans
b) Calculer la probabilité pour qu'un stylo ait une durée de vie supérieur à 6 mois.
c) Après deux ans d'utilisation, quelle est la probabilité que le stylo dure plus que trois ans

Exercice N°2 : (7 pts)

1/ On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,e^{x-1} - 1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$+\infty$

a) Calculer $g(1)$

b) Déduire le signe de $g(x)$

Dans la suite, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{x-1} - x$.

On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2/a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite $\Delta : y = -x$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $-\infty$

c) Etudier la position relative de (ζ_f) et Δ.

3/ Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

4/a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions α et β.

d)Justifier que $\alpha \in \left]-0.4\ ;\ -0.3\right[$ et $\beta \in \left]1.8\ ;\ 1.9\right[$

5/ Tracer la courbe (ζ_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

6/ Soit un réel $\lambda < -1$ et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (ζ_f), la droite Δ et les droites d'équations : $x = \lambda$ et $x = -1$

a) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-2)e^{x-1}$. Calculer $h'(x)$.

b) Montrer que $A(\lambda) = (\lambda - 2)e^{\lambda - 1} + 3e^{-2}$

c) Trouver $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$

Exercice N°3 : (3.5 pts)

On considère l'équation différentielle : $(A): y' = -10y + 6$

Où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) a/ Résoudre l'équation (A)

b/ Donner la solution f de l'équation différentielle (A) telle que $f(0) = 0$.

2) Aux bornes d'une bobine de résistance R (exprimé en ohms) et d'inductance L (exprimée en henry on branche , à l'instant $t = 0$, un générateur de force électromotrice E (exprimée en volts)
L'unité de temps est la seconde.
L'intensité du courant dans le circuit (exprimer en ampères) est une fonction dérivable du temps

notée i A l'instant $t=0$ l'intensité est nulle.
Au cours de l'établissement du courant. la fonction i est solution de l'équation différentielle

$(A'): Ly' + Ry = E$

a) Résoudre l'équation (A')

b) Déduire l'expression de $i(t)$ pour $t \geq 0$ sachant que $R = 5$, $L = \frac{1}{2}$ et $E = 3$.

c) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} i(t)$

Exercice N°4: (3.5 pts)

On considère les équations différentielles (E): $y' - 2y = 8$ et $(E'): x.y' - (2x+1).y = 8x^2$

1/ a) Déterminer les fonction g solutions de (E).

b) Déterminer la fonction g_0 qui s'annule en ln(2).

2/ on pose $f(x) = x.g(x)$

a) Montrer que f est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E)
b) Résoudre alors (E')