Lycée Secondaire Grombalia **Mathématiques** Prof : Anis Ben Rejeb	**Devoir de contrôle** **N°3**	Classe : $4^{ème} SC_2$ Durée : 2H Date : 2022/ 2023

Exercice n°1 : (6 points)

.

1) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=2x-x\ln x$.

On désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

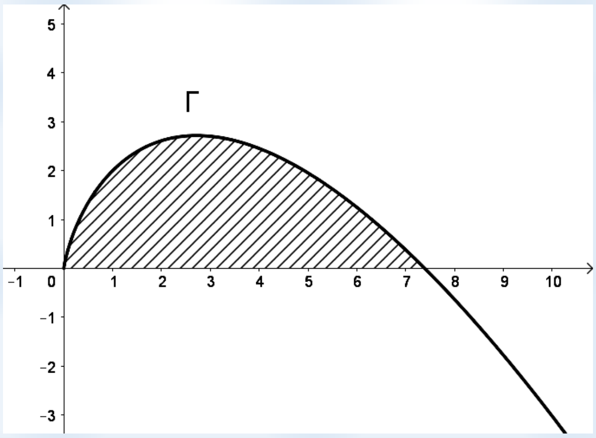
a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Résoudre dans $]0,+\infty[$ les équations

$$f(x)=x \text{ et } f(x)=0 \quad .$$

c) En déduire le tableau de signe de f.

d) On a tracé dans la figure ci-contre la courbe Γ .
Calculer $\mathcal{A}$ l'aire de la partie hachurée du plan.



2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $1\le U_n\le e$.

b) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_{n+1}-U_n=U_n\left(1-\ln(U_n)\right)$.

c) En déduire la monotonie de la suite (U_n) .

d) Justifier alors que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice n°2 : (8 points)

1) On donne ci-contre le tableau de variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(1-2x)e^{2x}-1$

.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(1-x)e^{2x}-x$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat

b) Prouver que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

c) Montrer que la droite $\Delta : y=-x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

d) Etudier la position relative de (C) et Δ .

3) a) Montrer que pour tout réel x ; $f'(x)=g(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $0,8\prec\alpha\prec0,9$.

d) Justifier que (C) admet un point d'inflexion I à préciser.

4) Tracer (C) et Δ ..

5) Soit λ un réel strictement inférieur à 0. On pose $I(\lambda)=\int_{\lambda}^{0}(1-x)e^{2x}\,dx$.

a) Donner une interprétation graphique de $I(\lambda)$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(\lambda)=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}\lambda-\frac{3}{4}\right)e^{2\lambda}$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} I(\lambda)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice n°3 : (6 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

On donnera tous les résultats de l'exercice sous la forme d'une valeur approchée à 10^{-2} prés.

Mohamed fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants tous identiques en apparence, mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant soit défectueux est égale à **0,02.**

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés.

Mohamed achète 50 composants.

1) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
2) Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ?
3) Calculer la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ?
4) Quel est dans un lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1=0,0005$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 \succ 0$.

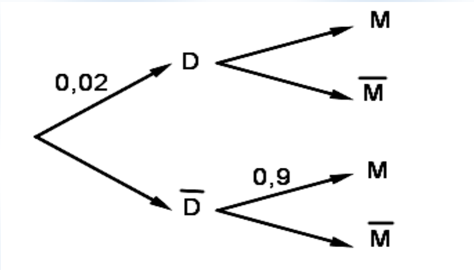
1) **a)** Calculer $P(T_2\leq 1000)$ en fonction de λ_2.

b) Sachant que $P(T_2\geq 1000)=0,9$, vérifier que $\lambda_2=0,0001$

2) Calculer $P(T_1\geq 1000)$.

3) On note l'évènement D "le composant est défectueux" et l'évènement M " le composant est en état de marche après 1000 heures"

a) Compléter l'arbre pondéré :



b) Calculer la probabilité que le composant soit en état de marche 1000 heures après son installation.
c) Sachant que le composant acheté est encore en état de marche 1000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?

Bon travail !