

EXERCICE1(3points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. (Avec justification).

1) La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X, dont les valeurs sont 2,3,4,5 est définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 2[\\ \frac{1}{3} & \text{si } x \in [2, 3[\\ \frac{11}{24} & \text{si } x \in [3, 4[\\ \frac{5}{8} & \text{si } x \in [4, 5[\\ 1 & \text{si } x \in [5, +\infty[\end{cases}$$

Alors $p(X \geq 3)$ est:

- a/ 1 b/ $\frac{7}{12}$ c/ $\frac{11}{24}$ d/ $\frac{2}{3}$

2) On tire successivement et sans deux jetons d'une urne contenant 20 jetons numérotés de 0 à 19 alors la probabilité d'obtenir deux jetons portant des numéros impairs est:

- a/ 0,5 b/ $\frac{9}{38}$ c/ 0,25 d/ 0,1

3) Soient $I = \int_{\frac{1}{3}}^1 \ln x \, dx$ et $J = \int_{\frac{1}{3}}^1 \ln \frac{1}{x} \, dx$ alors :

- a/ $I \leq J$ b/ $I \geq J$ c/ $I = J$ d/ $I = 0$

EXERCICE2(5points)

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher: six boules blanches numérotées :1;1;2;2;2;2 et quatre boules noires numérotées :1;1;2;2.

1) Une épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément trois boules du sac.

Calculer la probabilité des événements suivants:

S " tirer trois boules blanches ".

E " tirer au moins une boule noire".

C " la somme des chiffres marqués sur les trois boules tirées est égale à 5 "

2) On répète l'épreuve précédente trois fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans le sac et on considère la variable aléatoire X qui prend pour valeurs le nombre de fois où l'évènement S est réalisé.

a/ Déterminer la loi de probabilité de X .

b/ Calculer son espérance mathématique et son écart type.

c/ Calculer la probabilité de l'évènement : " $1 \leq X < 3$ ".

EXERCICE3(5points)

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n+2} dx$

1)

a/ Calculer I_0 .

b/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

c/ En déduire que (I_n) est une suite convergente.

2)

a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+3}$.

b/ En déduire la limite de la suite (I_n) .

3) Calculer I_2 et I_4 .

EXERCICE4(7points)

On considère la fonction f définie par: $f(x) = 1 + \ln[x(2-x)]$ et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est 4cm.

1)

a/ Montrer que l'ensemble de définition de f est $]0,2[$.

b/ Etudier les variations de f .

2)

a/ Montrer que la droite $\Delta: x=1$ est un axe de symétrie pour $\mathcal{C}$.

b/ Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite $(O, \vec{i})$. On notera x_0 la plus petite des abscisses.

3) Soit φ la fonction définie sur $]0,2[$ par: $\varphi(x) = f(x) - x$

a/ Etudier les variations de φ .

b/ En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une est 1 et l'autre sera notée α .

c/ Vérifier que $x_0 < \alpha < 0,3$ et que $\ln[\alpha(2-\alpha)] = \alpha - 1$

d/ Préciser le signe de $\varphi(x)$ et en déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\Delta': y=x$.

4) Tracer $\mathcal{C}$ et Δ . (on prendra $x_0 \simeq 0,2$)

5) Soit $E = \int_{\alpha}^1 \ln[x(2-x)] dx$.

a/ Montrer que $E = \alpha(\alpha-1) - 2 \int_{\alpha}^1 \frac{1-x}{2-x} dx$. En déduire que $E = -\alpha^2 + 5\alpha - 4 - 2\ln\alpha$

b/ Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par les droites $\Delta: x=1$, $D: x=\frac{3}{2}$, la droite $(O, \vec{i})$

et la courbe $\mathcal{C}$