

LYCEE ELHICHRIA ◇◇◇◇ DEVOIR DE CONTRÔLE N°3 MATHÉMATIQUES ◇◇◇◇	SECTION : 4^{ème} Sc
Durée : 2H	Date : 30/04/2025

NB : Le sujet comporte 4 pages.

La page 4 est une annexe à rendre avec la copie.

Exercice n°1 : (7pts)

Une infection touche 10 % des moutons d'une ferme.

Le vétérinaire effectue des tests de dépistage sur les moutons qui donne ces résultats.

* Lorsque qu'un mouton est infecté, la probabilité que le test soit positif égal à 0,8

* lorsque qu'un mouton n'est pas infecté, la probabilité que le test soit négatif est de 0,9.

On note : M « le mouton est infecté » et T « le test est positif »

1) On choisit un mouton au hasard.

a/ Calculer la probabilité de choisir un mouton infecté et qui a un test positif.

b/Montrer que $p(T) = 0,17$

2) **Parmi les moutons infectés**, On choisit 200 moutons au hasard.

Calculer la probabilité de ces événements :

a/ Deux moutons exactement ont un test négatif

b/ Au moins un mouton qui a un test négatif.

c/ Quelle est le nombre moyen des moutons qui ont un test négatif.

3) La durée du suivi d'un mouton par le vétérinaire jusqu'à qu'il soit guérit, noté Y suit

une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,6$ exprimé en jours

a/ Quelle est la probabilité que le suivi dure plus que 6 jours.

b/ Quelle est la probabilité que le suivi dure moins de 3 jours

c/ Sachant qu'un mouton n'est pas guérit au bout de 3 jours, quelle est la probabilité qu'il soit guérit avant 10 jours.

<http://mathematiques.kooli.me/>

Exercice n°2 : (7pts)

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} xe^x - x \ln x + x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et on note par C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a/ Montrer que f est continue à droite en 0.

b/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a/ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat.

3) Dans l'annexe ci-joint on a construit la courbe de la fonction $x \rightarrow \ln x$ et la droite $\Delta: y = x$

a/ Graphiquement justifier que pour tout $x > 0$ on a : $\ln x < x$ puis déduire que $x < e^x$.

b/ Déduire que pour tout $x > 0$ on a : $e^x - \ln x > 0$.

c/ Montrer que $f'(x) = (e^x - \ln x) + xe^x$.

d/ Déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

4) a/ Déterminer une équation de la tangente (T) à C_f au point A d'abscisse 1.

b/ Montrer que (T) coupe l'axe des ordonnées en un point B d'abscisse $(1 - e)$.

5) a/ En utilisant la courbe de la fonction $x \rightarrow \ln x$, construire dans l'annexe le point M(e,0) sur l'axe des abscisses puis construire les points A(1, e + 1) et le point B(0, 1 - e)

b/ Construire dans l'annexe la tangente (T) et la courbe C_f .

6) Soit un réel $\alpha \in]0, 1[$. On note par $K(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

a/ Par une intégration par partie, calculer en fonction de α les intégrales :

$$I = \int_{\alpha}^1 xe^x dx \quad \text{et} \quad J = \int_{\alpha}^1 x \ln x dx$$

b/ Déduire que : $K(\alpha) = (1 - \alpha)e^{\alpha} + \frac{1}{2}\alpha^2 \ln \alpha + \frac{3}{4}(1 - \alpha^2)$

c/ Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} K(\alpha)$.

<http://mathematiques.kooli.me/>

Exercice n°3 : (6 pts)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de variable x , dérivable sur $\mathbb{R}$

1) a/ Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = xe^{-x}$

Montrer que φ est solution de l'équation (E) .

b/ Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.

c/ Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $f - \varphi$ est une solution de (E_0) .

d/ En déduire les solutions de l'équation (E) .

2) Soit g la solution de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $g(0) = 1$

Montrer que pour tout réel x on a : $g(x) = (x + 1)e^{-x}$.

3) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n \leq 1$.

b/ Montrer que (u_n) est décroissante.

c/ Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

4) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \ln(u_n)$

a/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $w_n - w_{n+1} = u_n$

b/ On pose : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$, $n \geq 1$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $S_n = -w_n$.

c/ Déterminer la limite de la suite (S_n)

Annexe

Nom et prénom:

Classe : 4^{ème} SC

