

	Lycée pilote 15 octobre 1963 – Bizerte	Classe : 4 ^{ème} Sc-exp
	Profs: Mme Bayoudh & M Kachouri	Date : 10/05/2024
	Devoir de synthèse n° 3 en mathématiques	Durée : 3 heures

Exercice 1

3 points

Les résultats seront arrondis au millième.

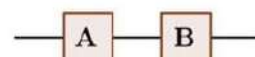
La durée de vie, X en jours d'un composant électronique de type A est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.005$ et la durée de vie, Y en jours d'un composant électronique de type B est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\mu = 0.002$.

Les durées de vie de A et B sont indépendantes.

1. Deux composants électroniques A et B sont montés en série sur une machine.

La machine tombe en panne dès qu'un des composants cesse de fonctionner.

- Calculer la probabilité que le composant A fonctionne encore après 10 semaines.
- Calculer la probabilité que la machine fonctionne encore après 10 semaines.

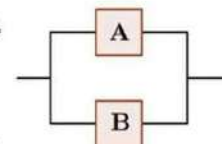


2. Deux composants électroniques A et B sont montés en parallèle sur une machine.

La machine tombe en panne si les deux composants cessent de fonctionner.

La machine a bien fonctionné pendant les deux mois mars et avril.

- Calculer la probabilité que le composant B tombe en panne avant le premier aout.
- Déterminer la probabilité que la machine tombe en panne avant le premier aout.



Exercice 2

5 points

On considère l'équation différentielle (E) : $y' \ln 2 + 1 = 2^{-y}$.

- Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$
- Déterminer la solution constante h_0 de (E).
- Soit h une fonction positive et dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $g(x) = -1 + 2^{h(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
 - Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.
 - Montrer que h est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_0).
 - En déduire l'ensemble des solutions positives de l'équation (E).
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\ln(1+e^{1-x})}{\ln 2}$
 - Vérifier que f est une solution de (E).
 - Montrer que la valeur moyenne sur $[1, 1 + \ln 2]$ de la fonction φ définie par $\varphi(x) = 2^{\frac{-\ln(1+e^{1-x})}{\ln 2}}$ est égale à $\frac{\ln(1,5)}{\ln}$
- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]0, +\infty[$.
 - Montrer que $f^{-1}(x) = 1 - \ln(2^x - 1)$ pour tout $x > 0$.

Les résultats seront arrondis à l'unité sauf indication contraire.

▼ Depuis le 7 octobre 2023 l'armée de l'occupation sioniste mène dans la bande de GAZA une « guerre de génocide » : Crime contre l'humanité tendant à le massacre totale ou partielle d'un groupe national, ethnique, racial ou religieux).

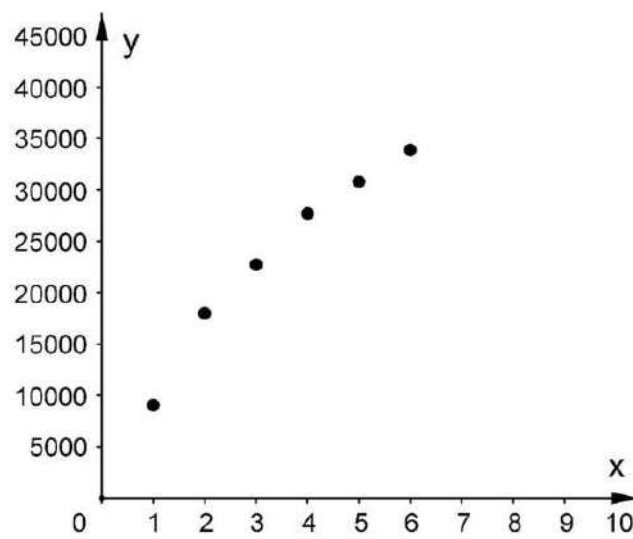
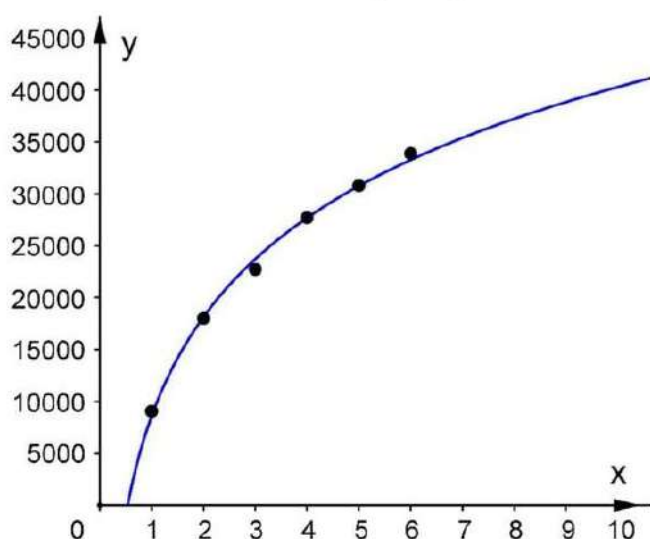
▼ Le tableau statistique ci-dessous donne le nombre de Martyrs palestiniens en fonction du nombre de mois à partir du 7 octobre.

Nombre de mois : x	1	2	3	4	5	6
Nombre de Martyrs : y	9061	17997	22722	27708	30800	33886

(Source : Le ministère de la Santé de Gaza)



On donne ci-dessous le nuage de points associé à la série statistique (x, y) .



- Déterminer le coefficient de corrélation r de la série (x, y) . (arrondir à 10^{-3} près)
- Un ajustement affine de la série (x, y) à court terme est-il justifié ?
- Déterminer une équation de la droite D de régression de y en x , obtenue par la méthode des moindres carrés.
- En déduire une estimation du nombre de Martyrs palestiniens si ce massacre se prolonge un mois de plus.

2. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement logarithmique.

On admet que $y = 8595 + 13772 \ln(x)$.

- En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre de Martyrs palestiniens si cette tuerie dure un mois de plus.
- Le ministère de la santé de Gaza annonce qu'au 7^{ème} mois de cette guerre le nombre de Martyrs palestiniens s'élève à 34622.
Lequel des deux ajustements est le plus pertinent ?

3. Malgré toutes les tentatives d'extermination massive, le peuple palestinien refuse de quitter sa patrie.

Le 7 octobre 2023, la population palestinienne dans la bande de GAZA était au nombre de 2,3 millions.

- Sachant que dans cette période, l'augmentation moyenne naturelle de la population palestinienne est de 5000 personnes chaque mois.
Donner alors une estimation de la population palestinienne le 7 août 2024 si cette « guerre de génocide » se poursuit 10 mois au total.
- Justifier alors l'affirmation suivante :
« Cette guerre de génocide n'arrivera pas à exterminer le peuple palestinien »

A. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x + \ln(1 + e^x)$.
c) Montrer que C_f admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
d) Etudier la position relative de C_f et son asymptote oblique Δ .
2. a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f
b) Tracer C_f et Δ .
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$.
a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g(x) = 0$
b) Tracer alors C_g la courbe représentative de g dans le même repère.

B. Soit la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $a_n = \int_0^n f(x) - g(x) dx$.

1. a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.
b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq e^{-x}$.
c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq 2 - 2e^{-n}$.
2. a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
b) En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite ℓ
c) Interpréter graphiquement la limite ℓ

C. Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $0.4 < \alpha < 0.5$.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n \geq 0$
b) Montrer que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. a) Justifier que $e^{2\alpha} - e^\alpha - 1 = 0$
b) En déduire la valeur exacte de $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Bon travail