

Sfax-1, Mahdia & Tunis(1&2)	Devoir de contrôle N°3		4 ^{ème} Math
Date : 26 / 04 / 2025	Mathématiques	Coefficient : 4	Durée : 2 h

- Noter bien :**
- Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté des réponses.
 - Aucun document n'est autorisé, sauf, une calculatrice non programmable.
 - L'indication des références des exercices et des questions est obligatoire.

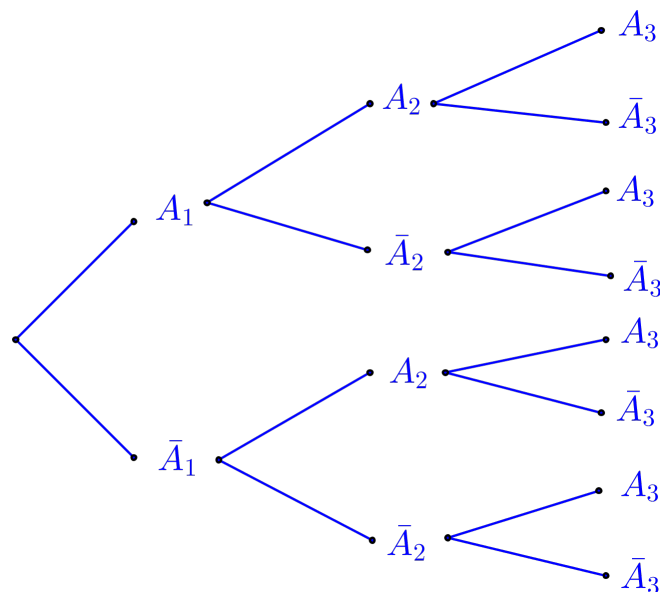
Exercice N°1:

(7 points).

- (I) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y' + \frac{1}{2}y = \sqrt{e^{1-x}}$
- 1 a Vérifier que la fonction V définie sur $\mathbb{R}$ par : $V(x) = x\sqrt{e^{1-x}}$ est une solution de (E)
- b Démontrer qu'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est une solution de (E) si et seulement si $(g - V)$ est une solution de l'équation différentielle $(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$
- 2 a Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E')
- b Déterminer la solution g de (E) vérifiant : $g(0) = 0$
- (II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\sqrt{e^{1-x}}$ de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 1 a Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ puis interpréter graphiquement ce résultat.
- b Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 2 a Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
- b Prouver que pour tout réel x dans l'intervalle $[0; 1]$ on a : $0 \leq f(x) \leq 1$
- 3 Tracer soigneusement la courbe $\mathcal{C}$
- (III) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $I_n = \frac{1}{n!2^{n+1}} \int_0^1 x^n \sqrt{e^{1-x}} dx$ et $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!2^k}$
- 1 a Montrer que : $I_1 = \sqrt{e} - \frac{3}{2}$
- b Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}$
- c Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n(n!)2^{n+1}}$
- 2 a Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n = \sqrt{e} - I_n$
- b Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

- Lors du recours aux tirs au but, la probabilité que le gardien arrête le premier tir est 0,64 :
- S'il arrête un tir, il arrête le suivant avec la probabilité de 0,75.
 - S'il a encaissé un but, il arrête le tir suivant avec la probabilité de 0,55.
- On appelle les événements suivants :
- A_1 « le gardien arrête le premier tir »
 - A_2 « le gardien arrête le deuxième tir »
 - A_3 « le gardien arrête le troisième tir »

- 1 Recopier et compléter l'arbre pondéré de probabilité ci-dessous.
- 2 Soit X l'aléa numérique donnant le nombre des arrêts du gardien lors des trois premiers tirs.
- Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - Montrer que $p(X = 0) = 0,0729$ et que $p(X = 1) = 0,2106$
 - Achever la loi de probabilité de X
 - Estimer le nombre d'arrêts moyen lors d'une séance de trois tirs consécutifs.
- 3 On note A_n « le joueur arrête le n ème tir » et on pose $p_n = p(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- Exprimer $p(A_n \cap A_{n+1})$ et $p(\bar{A}_n \cap A_{n+1})$ en fonction de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
 - En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{11}{20}$
- 4 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = p_n - \frac{11}{16}$
- Montrer que la suite (u_n) est géométrique dont on précisera la raison q et le 1^{er} terme.
 - En déduire u_n puis p_n en fonction de n
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$



- 1 a Recopier et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
5^n							
Reste modulo 7 de 5^n							

- b Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $5^{n+6} - 5^n$ est divisible par 7
- c En déduire que 5^{n+6} et 5^n ont le même reste modulo 7
- d Justifier, à l'aide des résultats précédents, que $5^{2024} \equiv 4 \pmod{7}$ et $5^{2025} \equiv 6 \pmod{7}$
- 2 a Comment peut-on généraliser le reste de la division euclidienne de 5^n par 7?
- b En déduire que pour tout entier naturel n les nombres 5^n et 7 sont premiers entre eux.
- 3 Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n 5^k = 5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n$
- a Prouver que pour tout entier naturel n on a : $4S_n = 5^{n+1} - 1$
- b En déduire que S_n et 5^n sont premiers entre eux.
- 4 Soit a un entier.
- a Etablir que pour tout entier naturel n on a : $4S_n \equiv a \pmod{7} \iff S_n \equiv 2a \pmod{7}$
- b Montrer que $4S_{2024} \equiv 5 \pmod{7}$
- c En déduire le reste modulo 7 de S_{2024}
- d Déterminer le plus petit entier naturel n tel que S_n est divisible par 7
- 5 On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E_n) : 5^n X + S_n Y = 1$ où n est un entier naturel.
- a Vérifier que $(5, -4)$ est une solution de (E_n)
- b Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_n)