

L.P Mahdia L.P Sfax 2	<u>Devoir de Contrôle n°3</u>	Niveau : 4 ^{ème} Maths
<u>Date</u> : 25 / 04 / 2023	<u>Profs</u> : Hichem Zaghdane & Tarek Meddeb	<u>Durée</u> : 2 heures

Exercice n°1 (6 pts)

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(2;2;2)$, $D(0;0;2)$ et $E(2;2;0)$.

- 1) a/ Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
b/ Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC .
c/ Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $EABC$, En déduire la distance du point E au plan $P = (ABC)$.
- 2) a/ Ecrire une équation cartésienne du plan P .
b/ Soient a, b et c trois réels tels que $a + b = c + 4$.
Vérifier que le point $M(a; b; c + 2)$ appartient à P . En déduire que $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{16}{3}$.
- 3) a/ Ecrire une équation de la sphère (S) de centre E et tangente au plan P .
b/ Déterminer les coordonnées du point de contact G de la sphère (S) et du plan P .
c/ Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC .
- 4) Soit h l'homothétie de rapport (-2) telle que $h(E) = D$.
a/ Déterminer le centre de h .
b/ Caractériser la sphère (S') image de (S) par h , puis déterminer $(S') \cap P$.
- 5) Soit a un réel de l'intervalle $[1; e]$ et le point $I_a(2\ln a, 2\ln a, 2 - 2\ln a)$.
a/ Montrer que $I_a \in [ED]$.
b/ On note $d_a = d(I_a, (AB))$. Montrer que $d_a = \sqrt{12(\ln a)^2 - 16\ln a + 6}$.
c/ Montrer que d_a est minimale si et seulement si, $I_a = G$.
d/ Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ image de (AB) par h .

Exercice n°2 (5 pts)

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On pose $S = \sum_{k=0}^6 a^k$ et soit p un nombre premier tel que p divise S .

- 1) a/ Montrer que $a^7 \equiv 1 \pmod{p}$.
b/ Montrer p ne divise pas a .
c/ En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $a^{(p-1)m} \equiv 1 \pmod{p}$.
- 2) On suppose que 7 ne divise pas $p-1$.
a/ Montrer que $a \equiv 1 \pmod{p}$.
b/ En déduire que $p = 7$.
- 3) Montrer que, si p un nombre premier tel que p divise S , alors $p = 7$ ou $p \equiv 1 \pmod{7}$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1) On considère l'équation différentielle $(E): y' + ny = x + \frac{1}{n}$.

a/ Vérifier que la fonction u définie par : $u(x) = \frac{x}{n} + e^{-nx}$ est solution de (E) .

b/ Résoudre l'équation différentielle $(E'): y' + ny = 0$.

c/ Montrer que : f est solution de (E) si, et seulement si, $f - u$ est solution de (E') .

d/ Résoudre l'équation (E) .

e/ Déterminer la solution f de (E) vérifiant : $f(0) = -1$.

2) Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$.

On note (C_n) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

b/ Etablir le tableau de variations de f_n .

3) a/ Montrer que l'équation : $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α_n .

b/ Montrer que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$.

c/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$. En déduire que $f_n(1) > 0$.

d/ Montrer que $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$.

4) a/ Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$.

b/ En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$.

c/ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.

5) a/ Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$.

b/ En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2 \ln n}{n}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.