

Exercice 1 : (10 pts)

Partie I :

- 1 On considère les équations différentielles $(E) : y' - 2y = 0$ et $(F) : y'' - y = 0$.
 - a Résoudre l'équation différentielle (E) .
 - b Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $h(x) = e^x g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que g est une solution de (F) , si et seulement si, h' est une solution de (E) .
 - c En déduire que l'ensemble des solutions de (F) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- 2 Soit g la solution de (F) vérifiant : $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2$.
 - a Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^x - e^{-x}$.
 - b Dresser le tableau de variation de g . En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.
On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Étudier les variations de f et construire $\mathcal{C}_f$.
- 4 Soit φ la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $\varphi(x) = \ln(\tan x)$.
 - a Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
 - b Montrer que φ^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi^{-1})'(x) = f(x)$.
 - c Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{A}(\lambda)$ est l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Partie II :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose pour tout $x \in]0, +\infty[$, $G_n(x) = \int_0^{\ln x} \frac{(g(t))^n}{g'(t)} dt$.

- 1 Calculer $G_1(x)$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.
- 2
 - a Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $(g(t))^2 = (g'(t))^2 - 4$.
 - b En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $G_{n+1}(x) = \frac{(x^2 - 1)^n}{nx^n} - 4G_{n-1}(x)$.
- 3 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{G_n(\sqrt{2})}{2^n}$.

- (a) Calculer u_1 .
- (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, u_{n+1} = \frac{1}{2n(\sqrt{2})^{3n}} - u_{n-1}$.
- (c) Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire que (u_n) est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2 : (10 pts)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A :

- 1 On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $143u - 840v = 1$.
 - (a) Vérifier que le couple $(47, 8)$ est une solution de (E).
 - (b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).
 - (c) Déterminer les inverses de 143 modulo 840.
- 2 Soit $x \in \mathbb{N}^*$ tel que : $x \wedge 899 = 1$.
 - (a) Montrer que : $x \wedge 29 = 1$ et $x \wedge 31 = 1$.
 - (b) Déduire que : $x^{840} \equiv 1 \pmod{899}$.
- 3 Déterminer un entier naturel x tels que :
$$\begin{cases} x^{143} \equiv 1 \pmod{899} \\ 100 \leq x \leq 1000 \end{cases}$$
.

Partie B :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $a_n = (n!)^2 + 1$.

- 1 Vérifier que : $a_n \equiv 1 \pmod{2}$.
- 2 Soit p un diviseur premier positif de a_n . Montrer que $p > n$.
- 3 On suppose que : $p \equiv 3 \pmod{4}$ et on pose $p = 4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer que l'entier naturel $N = 1 + (n!)^{2(2k+1)}$ est divisible par a_n et que : $n! + (n!)^p \equiv 0 \pmod{p}$.
 - (b) En déduire que : $p \equiv 1 \pmod{4}$.
- 4 Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels premiers qui s'écrivent sous la forme : $p = 4k + 1$, où $k \in \mathbb{N}^*$.