Lycée Ibn Sina Mahdia	*Devoir de contrôle N°3*
	Classe :4ème Maths — *Durée :2 heures*
Epreuve : MATHEMATIQUES	*Prof : GHAZI SFAXI* — *Date :27/4/2024*

Exercice N°1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=e^{\sqrt{x}}$.
On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1/a)Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.Interpréter graphiquement.
b)Dresser le tableau de variation de f.

2/Tracer la courbe (C_f) .(On précisera la nature de la branche infinie).

3/Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x e^{\sqrt{4t}}\,dt$.
Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée.

4/Soit G la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $G(x)=\int_1^{\sqrt{4x}} te^t\,dt$.

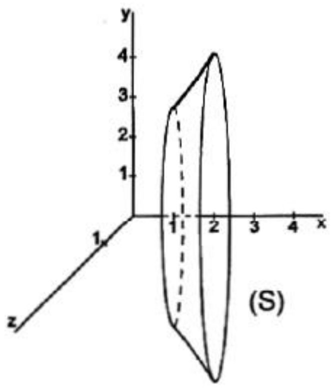
a)Montrer que G est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que pour tout $x\in[1,+\infty[, G'(x)=2F'(x)$.

b)En déduire que pour tout $x\in[1,+\infty[, 2F(x)=G(x)-G(1)$.

5/Prouver que pour $tout$ $x\in[1,+\infty[, G(x)=\left(\sqrt{4x}-1\right)e^{\sqrt{4x}}$.

6/Dans la figure ci-contre ,le solide de révolution **(S)** est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y=f(x)$; $x\in[1,2]$ autour de l'axe $(O,\vec{\imath})$.

Calculer le volume de **(S).**



Exercice N°2 (5 points)

Partie I

1/Vérifier que 1009 est un nombre premier.

2/ Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $2018x-2017y=2$.

3/Montrer que pour tout entier a : $a^{1009}\equiv a(\text{mod } 2018)$.

4/Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases}(x+3)^{1009}\equiv 6\ (mod\ 1009)\\ x\equiv 4\ (mod\ 2017)\end{cases}$.

Partie II

Considérons dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante $(F) : 2016\, x^{1009} + x - 2 \equiv 0 (mod\ 2018)$.

Soit x une solution de (F).

1/Montrer que si $d = x \wedge 2018$ alors $d = 1$ ou $d = 2$.

2/Montrer que (F) équivaut à : $2017x \equiv 2\ (mod\ 2018)$

3/En déduire l'ensemble des solutions de (F).

<u>Exercice N°3 (3 points)</u>

Le parc Kruger est un parc animalier situé en Afrique du sud.Fondé à la fin du XIXe siècle, celui-ci accueillit notamment une population d'éléphants africains ,une espèce menacée d'extinction à cause du braconnage intensif.

Le parc accueillit ainsi10 éléphants en 1905.Les scientifiques ont estimé que la population p au temps t,exprimé en années, vérifiait l'équation différentielle $(E) : p' = \frac{3}{20}p - \frac{p^2}{50000}$.

1/On suppose que la fonction p ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$.

On pose alors, pour tout $t \geq 0, F(t) = \frac{1}{p(t)}$.

1/Exprimer $F'(t)$ en fonction de $p(t)$ et $p'(t)$.

2/Montrer que p est solution de l'équation différentielle (E) si est seulement si F est solution de l'équation différentielle $(E') : y' = -\frac{3}{20}y + \frac{1}{50000}$.

3/Résoudre l'équation différentielle (E').

4/En déduire que l'unique solution de l'équation différentielle (E) ayant pour condition initiale $p(0) = 10$ est $p : t \mapsto \frac{7500}{1+749e^{-0,15t}}$.

5/Déterminer la population limite d'éléphants dans le parc.

<u>Exercice N°4 (6 points)</u>

<u>Partie A</u>

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

- L'urne U_1 contient trois boules blanches et deux boules noires.
- L'urne U_2 contient une boule blanche et quatre boules noires.

1/L’épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de U_1 et successivement sans remise trois boules de U_2.
On considère l’aléa numérique **X** qui prend pour valeur le nombre de boules blanches obtenues.

a)Montrer que $p(\boldsymbol{X}=0)=\frac{1}{25}$.

b)Déterminer la loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$.

c) Calculer l’espérance et la variance de $\boldsymbol{X}$.

2/On répète l’épreuve **trois fois de suite**, en remettant à chaque fois les boules dans leurs urnes respectives. Ensuite :

▪Si on obtient trois fois de suite cinq boules noires, on mélange les deux urnes et on tire simultanément deux boules du mélange.

▪Si non on tire une boule de chaque urne.

Quelle est la probabilité d’obtenir deux boules blanches ?

Partie B

On considère maintenant n urnes : U_1, U_2,..., U_n $(n \geq 1)$ tel que :

▪ l’urne U_1 contient trois boules blanches et deux boules noires.

▪ Chacune des urnes U_2,..., U_n, contient une boule blanche et quatre boules noires.

On tire une boule de l’urne U_1 que l’on remet dans l’urne U_2 ; puis on tire une boule de l’urne U_2 que l’on remet dans l’urne U_3 et ainsi de suite jusqu’à tirer une boule de l’urne U_n.

Soient E_k l’événement « la boule tirée de l’urne U_k est blanche » $(1 \leq k \leq n)$ et p_k la probabilité de l’événement E_k.

1/Calculer $p(E_1)$; $p(E_2/E_1)$; et $p(E_2/\overline{E_1})$.En déduire $p(E_2)$.

2/A l’aide d’un arbre de probabilités, déterminer les probabilités des événements : (E_{n+1}/E_n),$(\overline{E_{n+1}}/E_n)$,$(E_{n+1}/\overline{E_n})$ et $(\overline{E_{n+1}}/\overline{E_n})$.

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}$.

3/Soit (a_n) la suite définie par $a_n=p_n-0{,}2$.

a)Montrer que (a_n) est une suite géométrique .

b)Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.