Exercice n°1 (6 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

- L'urne U_1 contient trois boules blanches et deux boules noires.

- L'urne U_2 contient une boule blanche et deux boules noires.

Une épreuve consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et la mettre dans U_2, puis tirer au hasard une boule de U_2 et la mettre dans U_1.

Soient les événements :

B_1: <<La boule tirée de U_1 est blanche>>

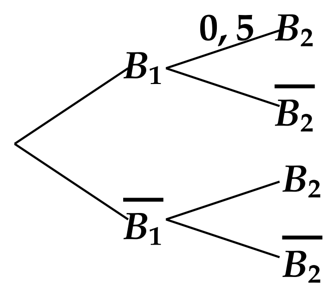
et B_2:<<La courbe tirée de U_2 est blanche>>.

1.
   a. Vérifier que $p\,(B_2/B_1) = 0,5$.

   b. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre .

   c. Montrer que $p\,(B_2) = 0,4$.

   d. Sachant que la boule tirée de l'urne U_2 est blanche, qu'elle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit blanche ?



2. Soit l'événement E: << La boule tirée de U_1 est blanche et la boule tirée de U_2 est noire>>.

   Vérifier que $p(E) = 0,3$.

3. Calculer la probabilité de l'événement F: << À la fin de l'épreuve, la répartition des boules dans les deux urnes reste inchangée>>.

4. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules noires restant dans l'urne U_2 à la fin de l'épreuve.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice n°2 (7 points)

1. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $39x - 38y = 5$.

   a. Soit (x, y) une solution de (E). Montrer que $x \equiv 5 \pmod{38}$.

   b. Résoudre alors l'équation (E).

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = 5 + 38^{n+1}$, $b_n = 5 + 39 \times 38^n$ et $d = a_n \wedge b_n$.

   a. Vérifier que (a_n, b_n) est une solution de (E). En déduire que d divise 5.

   b. Montrer que $d = 1$.

3. a. Montrer que $a_n^4 \equiv 1 \pmod{5}$ et que $b_n^4 \equiv 1 \pmod{5}$.
   En déduire que 25 divise $(a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1)$.

   b. Montrer que $a_n^4 \equiv 1 \pmod{2}$ et que $b_n^4 \equiv 1 \pmod{2}$.
   En déduire que 4 divise $(a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1)$.

   c. En déduire les chiffres de dizaines et unités de $(a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1)$.

4. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $x^{11} \equiv 17 \pmod{39}$.

   a. Soit x une solution de (F).
   Montrer que $x \wedge 39 = 1$. En déduire que $x^{12} \equiv 1 \pmod{39}$.

   b. Montrer alors que $17x \equiv 1 \pmod{39}$ puis que $x \equiv 23 \pmod{39}$.

   c. Déterminer alors l'ensemble de solutions de (F).

Exercice n°3 (7 points)

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{1-x} - \ln x$.

1. a. Dresser le tableau de variations de f.

   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$.

   c. Tracer la courbe C_f de f dans un repère orthonormé $\left(O\,; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

2 Soit $\lambda \in]0;1]$ et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

a Montrer que $A(\lambda) = e^{1-\lambda} + \lambda \ln(\lambda) - \lambda$.

b Calculer $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda)$.

3 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$;

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant A\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n - \frac{1}{n}$.

c Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e$.

4 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{e}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k}{n}}$$

a Etablir les égalités : $u_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ et $v_n = \dfrac{e-1}{n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 2$: $S_n = v_n - u_n$.

c Utiliser les résultats précédents pour démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$.

d En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$