4 Maths **Devoir de contrôle n°3** **26/04/2024**

L.Sayada **Epreuve de mathématiques** **Durée : 2 heures**

Exercice 1 (5,5 points)

Le tableau ci-dessous donne, pour les années indiquées, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances. On désigne par (X, Y) la série statistique double, où X est le rang de l'année et Y est le taux de mortalité infantile pour 1000 naissances.

Année	1997	2000	2003	2006	2009	2012	2015	2018	2021
X_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y_i	37,3	32,3	29,7	24,2	22,1	20,3	18,4	16,4	16,3

1) a) Représenter le nuage des points de cette série statistique et placer le point moyen G.

b) Donner à 10^{-2} près, le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y puis interpréter ce résultat.

c) Déterminer l'équation de la droite de régression D de Y en X.
(les coefficients seront arrondis au centième)

d) Estimer alors le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2024.

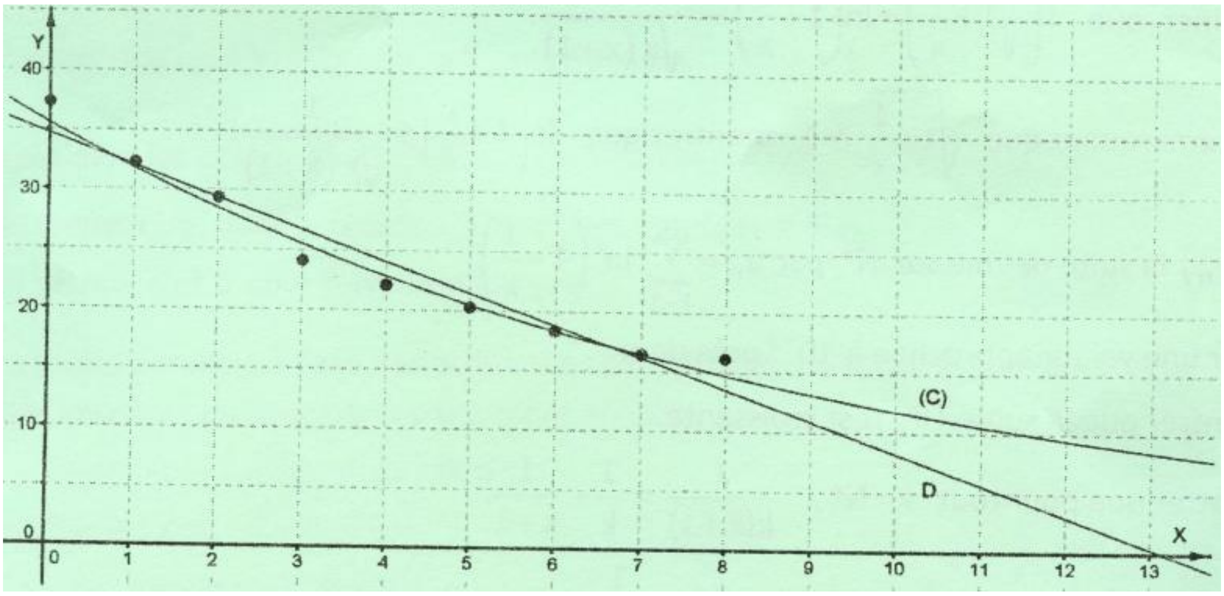
2) On pose Z=ln(Y) et on admet que la droite de régression Δ de Z en X a pour équation z= -0,11 x + 3,57.

a) Justifier qu'on peut modéliser le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances par y= 35,52 $\mathrm{e}^{-0,11\mathrm{x}}$.

b) Estimer, à l'aide de cet ajustement, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2024.

c) Calculer m = $\frac{1}{8}\int_0^8 35{,}52\ \mathrm{e}^{-0,11\mathrm{x}}\mathrm{dx}$ puis interpréter ce résultat.

3) Dans la figure ci-dessous, On a représenté la droite D définie en [1) c)], la courbe (C) : y = 35,52 $\mathrm{e}^{-0,11\mathrm{x}}$ et le nuage des points de la série (X, Y).



Lequel des deux ajustements proposés s'avère le plus adaptable
à la situation ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (7,5 points)

Soit l'équation différentielle (E) : y'+2y= 2 e^{-2x} ; où x est un réel.

1) Soit g la fonction définie sur IR par g(x)=(2x+1) e^{-2x} et $(\mathrm{C_g})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).

a) Vérifier que g est une solution de (E).

b) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si (f-g) est une solution de (E') : y'+2y=0.

c) Résoudre l'équation (E') puis l'équation (E).

2) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que $(\mathrm{C_g})$ admet un point d'inflexion K. (le préciser)

c) Tracer la courbe $(\mathrm{C_g})$.

3) Soit h la restriction de g à [0 ;+∞[.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1}définie sur un intervalle J que l'on déterminera puis tracer $(\mathrm{C_{h^{-1}}})$ dans le même repère. Soit α l'abscisse du point commun à $(\mathrm{C_g})$ et $(\mathrm{C_{h^{-1}}})$.

b) Calculer l'intégrale A=$\int_0^{\alpha} \mathrm{g(x)dx}$ puis déduire B=$\int_{\alpha}^{1} \mathrm{h^{-1}(x)dx}$.

Exercice 3 (7 points)

Partie A :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une entreprise fabrique de très grandes quantités de produits électroniques (des diodes, des résistances, des circuits intégrés, …) Pour cela, on utilise n machines M_1, M_2, … , M_n($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ et $i \leq j$: la machine M_i est plus ancienne que la machine M_j).

On constate que la probabilité qu'un produit soit fabriqué par la machine M_k ($1 \leq k \leq n$) est proportionnelle à l'entier k et que pour un produit fabriqué par cette machine M_k la probabilité qu'il soit défectueux est $\frac{e^{-k}}{k}$.

On prélève un produit dans le dépôt de cette entreprise et on désigne par M_k l'évènement : « le produit prélevé est fabriqué par la machine M_k » et par D l'évènement : « le produit prélevé est défectueux ».

1) a) Montrer que p(M_k)= $\frac{2k}{n^2+n}$.

b) montrer que p(D)= $\frac{2}{e-1}\left[\frac{1-e^{-n}}{n^2+n}\right]$.

Partie B : Dans cette partie, on prend n=5.

1) Vérifier que p(D) arrondi au centième est égale à 0,04.

2) Un commerçant se présente à cette entreprise et passe la commande de 3750 produits électroniques indépendamment fabriqués.

Soit X est la variable aléatoire qui indique le nombre de produits défectueux parmi ceux commandés.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer E(X) et σ(X) puis interpréter ces résultats.

Partie C : La durée de vie d'une machine Y, en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ=0,01.

1) Calculer p(Y$\geq$ 10) et p(Y$\geq$ 20).

2) Sachant qu'une fonctionné 10 ans, calculer la probabilité qu'elle fonctionne encore 10 ans de plus.