Devoir de contrôle N°3

Prof : ✍ Mme Gara - Mrs Masmoudi et Ben Regaya ✍

Exercice 1 : 7 points

On dispose d'une urne contenant quatre boules noires et deux blanches et d'un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Partie A :

Deux joueurs A et B sont présents.

1. Le joueur A extrait simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité qu'il tire deux noires.
2. Le joueur B jette le dé deux fois de suite. Montrer que la probabilité qu'il obtienne deux nombres dont le produit est supérieur ou égale à 9 est $\dfrac{5}{9}$.
3. A et B conviennent de jouer de la manière suivante : A extrait simultanément deux boules de l'urne :

   — S'il obtient deux boules noires, il gagne et la partie s'arrête.

   — Sinon, B jette le dé deux fois, s'il obtient deux numéros dont le produit est supérieur ou égal à 9, il gagne et la partie s'arrête, sinon le tour revient à A et on continue avec la même procédure. Les boules tirées à chaque essai sont remises dans l'urne. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que A gagne au n^{eme} essai.

   a. Calculer p_1 et p_2 puis p_n en fonction de n.

   b. Calculer la probabilié q_n que A gagne l'un de ses n premiers essais.

   c. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $q_n \geqslant 0,42$.

Partie B :

Maintenant A joue seul et extrait simultanément deux boules de l'urne et pour $k \in \{0, 1, 2\}$ on note A_k : " Il obtient k boules blanches ".

Aprés ce premier tirage, il reste quatre boules dans l'urne. A effectue à nouveau un deuxième tirage successif et sans remise de deux boules. On note C_k : " Il obtient k boules blanches lors du second tirage ".

1. a. Calculer $p(C_0|A_0)$ et $p(C_0|A_1)$.

   b. Calculer $p(C_0)$ et $p(C_1)$.

   c. Le joueur A a obtenu une seule blanche lors du second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule blanche lors du premier tirage.
2. Soit l'évènement : R : " Il a fallu effectuer les deux tirages pour que les deux boules blanches soient tirées de l'urne. Montrer que $p(R) = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 2 : 6 points

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E_1) : $4x-5y=9$.
2. On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E_2) : $(x+1)^2=5y+9$.
   a) Montrer que si (x,y) solution de (E_2) alors $x\equiv 1\ (mod\ 5)$ ou $x\equiv 2\ (mod\ 5)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E_2).
   c) Déterminer les solutions communes de (E_1) et (E_2).
   d) Déterminer les solutions (x,y) de (E_2) telles que $x\equiv 1\ (mod\ 5)$ et $x\wedge y=8$.
3. a) Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $3\left(1+2^4+2^{4\times 2}+\ldots+2^{4(p-1)}\right)=\dfrac{2^{4p}-1}{5}$.
   b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer les valeurs de n pour que l'équation (E_2) admette des solutions vérifiant $x=2^n$ et $x\equiv 1\ (mod\ 5)$ puis exprimer ces solutions en fonction de n.

Exercice 3 : 7 points

On considére la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}e^{\frac{-x}{2}}$. On note ζ la courbe de f dans un repére orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
   b) Dresser le tableau de variation de f et tracer ζ.
   c) Calculer le volume du solide de révolution engendré par rotation de la partie de ζ sur $[0,1]$ autour de l'axe des abscisses.

   On admet que pour $x>0$, $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si et seulement si $x=1$.
2. On note f_1 et f_2 les restrictions respectives de f à $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.
   a) Montrer que f_1 admet une bijection réciproque φ définie sur $\left[0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$.
   b) Étudier la dérivabilité de φ sur $\left[0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$.
   c) Montrer que f_2 réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Pour $x\geqslant 1$, on pose $g(x)=\varphi\circ f_2(x)$.
   a) Montrer que g est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.
   b) Vérifier que $g(2)<\dfrac{1}{2}$.
4. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{g(u_n)}$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
   b) Montrer que (u_n) est croissante.
   c) En déduire la limite de la suite (u_n).