Lycée secondaire Ibn Sina Grombalia ***** Devoir de contrôle n°3 ***** 2023/2024	*Prof : Mr. Ben Chaabene Ezzeddine*		
	Épreuve : Mathématique		
	3 Maths	**Durée :2h**	**08/05/2024**

Exercice N°1 : (03pts)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse ; en justifiant la réponse :

1) Le reste de la division euclidienne de 4^n par 3 égale à 1 .
2) Pour tout entier naturel non nul n ; on a $4n^2 \wedge n^2 = 4n^2$
3) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux alors $a^2 \vee ab = a^2 b$
4) Soit n un nombre premier alors 3 divise $n^2 - 1$
5) Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et pour tout : $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = 2^n$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n = 2^n$
6) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = -\frac{1}{4}$ et $U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

Exercice N°2 : (06pts)

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $3^{2n+1} + 2\text{x}4^{3n+1}$ est divisible par 11.
   b) Déterminer le reste de la division euclidienne de $N = 1 + 2^{63} + 3^{21}$ par 11.
2) a , b et n des entiers naturels tels que $a = 7n + 2$ et $b = 3n - 1$
   Montrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux alors $a \wedge b = 13$
3) Déterminer tous les couples (a , b) de$\mathbb{N}^2$ vérifiant :
   $$\begin{cases} a \wedge b = 9 \\ a + b = 117 \\ a < b \end{cases}$$
4) Soit dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E): $2x - 3y = 1$
   a) Vérifier que l'équation (E) est équivalente à l'équation :
      (E') : $2(x - 5) = 3(y - 3)$
   b) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E)

Exercice N°3: (06pts)

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2+U_n^2}{1+U_n} \; ; pour\ tout\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n < 2$

   b) Montrer que la suite U est croissante.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $2 - U_{n+1} \leq \frac{2}{3}(2 - U_n)$

   b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $2 - U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3) On pose $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} U_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $S_n \geq \frac{2n-2+2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{n}}$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

4) Soit $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+U_k}$; $n \in \mathbb{N}^*$

   a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$; $U_{k+1} - U_k = \frac{3}{1+U_k} - 1$

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{3} < T_n < \frac{n+2}{3n}$

   c) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$

Exercice N°4: (05pts)

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher.

Les boules blanches sont numérotés -1 ; -1 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 et les boules noires sont numérotés -1 ; 0 ; 1 ; 1

On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne, on considère les évènements suivants :

- A : « les 3 boules tirées sont de même couleurs. »
- B : « les 3 boules tirées sont de même numéros. »
- C : « les 3 boules tirées sont de même numéros et de même couleurs. »

1) a) Calculer $p(A)$; $p(B)$ et $p(C)$

   b) En déduire que $p(A \cup B) = \frac{17}{60}$

2) Déterminer les probabilités des évènements :

- D : « obtenir au moins une boule numérotée 1. »
- E : « La somme des numéros inscrits sur les boules tirées est égale à0. »

3) On considère l'épreuve suivante qui consiste à tirer au hasard 2 boules de l'urne de la manière suivante :

   On tire une première boule :

- Si elle porte le numéro 0 ; on ne la remet dans l'urne et on tire une deuxième boule.
- Si elle ne porte pas le numéro 0 ; on le remet dans l'urne et on tire une deuxième boule et on considère les évènements :

- M : « La première boule tirée porte le numéro 0 »
- N : « La deuxième boule tirée porte le numéro 1 »

  Calculer alors $p(N)$