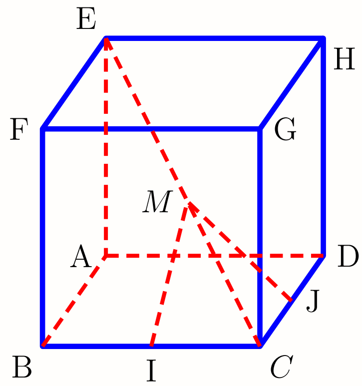
Devoir de contrôle n 3

Exercice n 1 (6.5 points)



La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].
Soit M un point quelconque du segment [CE].
Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1) **a)** Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.

b) Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t\ ;\ 1-t\ ;\ t)$.

2) **a)** Montrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].

b) En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.

c) Exprimer IM^2 en fonction de t.

3) On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\mathrm{I}M\mathrm{J}}$.

a) En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, montrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

b) En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.

c) Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f(t)=3t^2-t+\frac{1}{4}$.

d) En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{I}M\mathrm{J}}$ soit maximale.

e) Montrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].

Exercice n 2 (7 points)

On considère les nombres premiers $p=5$ et $q=13$. Soit $n=p\times q$. On définit l'ensemble :
$E=\{\ a\in\mathbb{N}\ \mid\ 2\le a\le n-1\}$ et $E'=\{\ a\in\mathbb{N}\ \mid\ 1\le a\le n-1\}$.

1) **a)** Pour un entier a non nul : Si 5 ne devise pas a, quelle est la divisibilité de a^4-1 ?

b) Pour un entier a non nul : Si 13 ne devise pas a, quelle est la divisibilité de $a^{12}-1$?

c) Soit $k=\mathrm{PPCM}(p-1,q-1)$. Calculer k.

d) Montrer que si $a\in E$ et $\mathrm{PGCD}(a,n)=1$, alors a^k-1 est divisible par n.

e) Soit la somme $T=1^k+2^k+3^k+\cdots+(q-1)^k$, où $q=13$ et k est la valeur trouvée en c). Déterminer le reste de la division euclidienne de T par $q=13$.

2) Pour $a\in E$, on considère la somme $S_k(a)=1+a+a^2+\cdots+a^{k-1}$, où k est la valeur trouvée en **1)c)**.

a) Vérifier que pour $a\neq 1$, on a $(a-1)S_k(a)=a^k-1$.

b) Montrer que si $a \in E$ vérifie $\text{PGCD}(a,n)=1$ et $\text{PGCD}(a-1,n)=1$, alors $S_k(a)$ est divisible par n.

c) On s'intéresse au cas où $\text{PGCD}(a-1,n) \neq 1$. Soit $a=14$.

i) Vérifier que $a \in E$ et calculer $\text{PGCD}(a,n)$ et $\text{PGCD}(a-1,n)$.

ii) Peut-on appliquer directement le résultat de **2)b)** ?

iii) Montrer, en calculant le reste de $S_k(14)$ dans la division par $p=5$, que $S_k(14)$ est divisible par 5.

iv) Montrer, en calculant le reste de $S_k(14)$ dans la division par $q=13$, que $S_k(14)$ n'est pas divisible par 13. Conclure sur la divisibilité de $S_k(14)$ par $n=65$.

3) Soient a et b deux entiers naturels appartenant à l'ensemble $E'=\{1,2,\ldots,n-1\}$, où $n=65$. On note $d=\text{PGCD}(a,b)$ et $m=\text{PPCM}(a,b)$.
Déterminer tous les couples d'entiers (a,b) de $E'\times E'$ tels que $a \leq b$ et : $m-d=60$.

Exercice n 3 (6.5 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sin(2x)+\sqrt{3}\cos(2x)$
et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) **a)** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $x=\frac{\pi}{12}$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

c) En déduire que le domaine d'étude de f peut être réduit à $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$.

2) On désigne par $(\mathscr{C}_0)$ la courbe représentative de la restriction de f à $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

a) Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C}_0)$ avec chacune des droites $(O,\vec{i})$ et $(O,\vec{j})$.

b) Étudier les variations de f sur $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ et construire $(\mathscr{C}_0)$.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=-2\sin\left(2|x|+\frac{\pi}{3}\right)$

a) Étudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Vérifier que g est paire et construire $(\mathscr{C}_g)$ dans le même repère.