

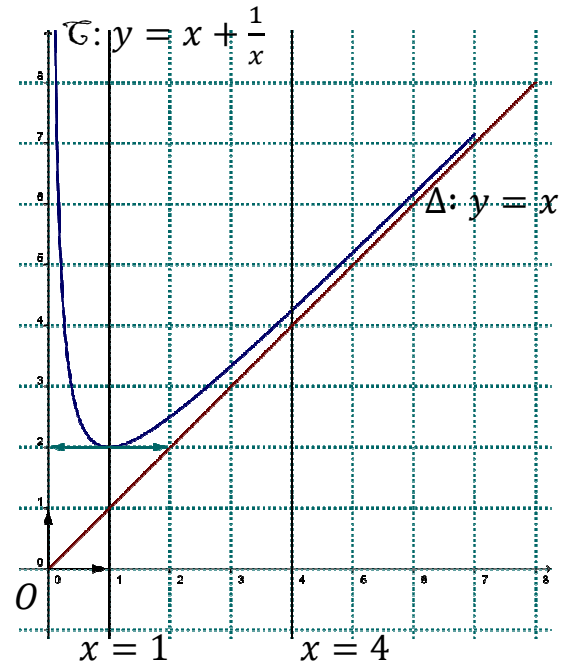
**Exercice 1 (6 points)**

1) Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x e^{1+x^2} dx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx \quad ; \quad \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad ; \quad \int_1^e x \ln x dx$$

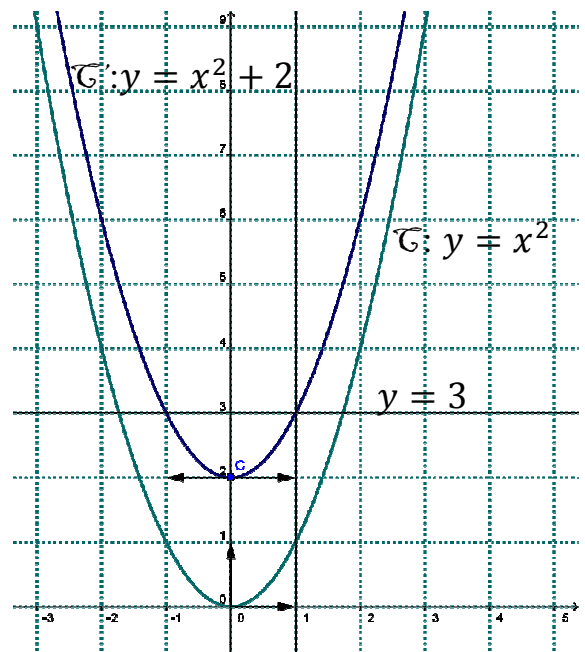
2) a) On considère la courbe  $\mathcal{C}$  suivante :

Calculer l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  limité par la courbe  $\mathcal{C}$   
la droite  $\Delta$  et les droites d'équations :  $x = 1$  et  $x = 4$ .



b) On considère les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  suivantes :

Calculer l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  limité par les courbes  
 $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  et la droite  $\Delta: y = 3$ .



### Exercice 2 (7 points)

A/ Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $g(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)$ .

- 1) Etudier les variations de  $g$ .
- 2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  telle que  $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ .
- 3) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

B/ Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que  $f$  est continue en 0.  
b) Montrer que  $f$  est dérivable en 0 et préciser  $f'(0)$ .  
c) Montrer que la fonction  $f$  est impaire.
- 2) a) Vérifier que  $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ .  
b) Vérifier que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
c) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .  
d) Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  de  $f$  ; on précisera sa tangente au point d'abscisse 0.

### Exercice 3 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct, on considère un triangle  $OAB$  tel que :

$OA = OB$  et  $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . On désigne par  $I$  le milieu du segment  $[AB]$  et par  $C$  et  $D$  les symétriques du point  $I$  respectivement par rapport à  $O$  et à  $B$ . Soit  $f$  la similitude directe qui envoie  $A$  sur  $D$  et  $O$  sur  $C$

- 1) Montrer que  $f$  est de rapport 2 et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .
- 2) a) Montrer que  $O$  est l'orthocentre du triangle  $ACD$ .  
b) Soit  $J$  le projeté orthogonal du point  $O$  sur  $(AC)$ . Déterminer les images des droites  $(OJ)$  et  $(AJ)$  par  $f$ . En déduire que  $J$  est le centre de la similitude  $f$ .
- 3) Soit  $g$  la similitude indirecte de centre  $I$ , qui envoie  $A$  sur  $D$ .  
a) Vérifier que  $g$  est de rapport 2 et d'axe  $(IC)$ . En déduire que  $(O) = C \circ g(O)$ .  
b) Déterminer  $(g \circ f^{-1})(C)$  et  $(g \circ f^{-1})(D)$ . Caractériser alors l'application  $g \circ f^{-1}$ .
- 4) On pose  $I' = f(I)$  et  $J' = g(J)$ .  
a) Déterminer  $(g \circ f^{-1})(J)$  et  $(g \circ f^{-1})(I')$ .  
b) En déduire que les droites  $(IJ)$ ,  $(I'J')$  et  $(CD)$  sont concourantes.