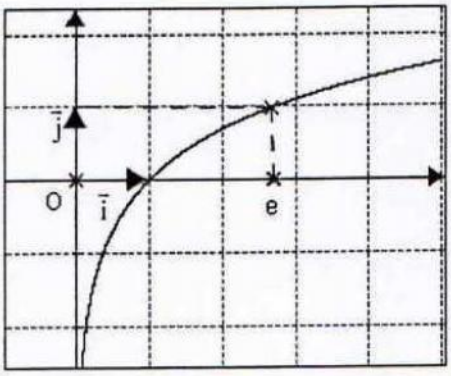
Lycée Majida Boulila Sfax M Jarraya Maher Le 7/3/2012	**DEVOIR DE SYNTHESE N°2** **MATHEMATIQUES**	Bac Sciences Durée 3 H

Exercice 1 : (3 points)

Q.C.M. :

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f continue et dérivable sur $]0, +\infty[$



Indiquer la réponse correcte :

1) Si F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$, alors :
   a/ F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
   b/ F est strictement croissante sur $]0, 1]$.
   c/ F est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

2) $\int_1^e f'(x)\,dx$ est égale à :
   a/ 1 b/ 0 c/ $e - 1$

VRAI.FAUX :

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse :

1) $\int_{-1}^{5} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int_1^5 \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$

2) Si A, B, C et E sont des points de l'espace $\mathcal{E}$ tels que A, B et C soient non alignés, alors l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

   $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{EM} = 0$, est une droite.

Exercice 2 : (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points A(2, -1, 3), B(1, 0, 3), C(3, 1, 0) et D(0, 2, -1).

1) a- Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
   b- Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
   c- En déduire la distance du point D au plan (ABC).

2) a- Montrer qu'une équation cartésienne du plan médiateur P du segment [AB] est : $x - y - 2 = 0$.
   b- Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
   c- Montrer que Δ coupe P en un point Ω dont on précisera les coordonnées.

3) Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z = 0$.
   a- Montrer que S est une sphère de centre Ω, dont on précisera le rayon R.
   b- Préciser $S \cap P$.
   c- Donner l'équation du plan Q tangent à S en A.

4) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que $MD^2 + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{D\Omega} = 0$.
   a- Montrer que $\mathcal{E}$ est la sphère de diamètre $[D\Omega]$.
   b- Donner une équation de $\mathcal{E}$.
   c- Déterminer $\mathcal{E} \cap P$.

Exercice 3 : (5 points)

Soit la suite (I_n) définie sur IN* par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x}\, dx$.

1) Calculer : $I_1 - I_3$.
2) Montrer que (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.
3) a- Calculer : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,.\, \cos^n x\, dx$.

   b- En déduire que pour tout n de IN* : $I_{n+2} - I_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

4) a- Montrer que pour tout n de IN* : $0 \leq I_n \leq \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

   b- En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

5) Soit g la fonction définie sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ par : $g(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-x} \frac{\sin^2 t}{\cos t}\, dt$.

   a- Montrer que g est dérivable sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ et que pour tout x de $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$: $g'(x) = -\frac{\cos^2 x}{\sin x}$.

   b- En déduire que $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx$.

Exercice 4 : (6 points)

A- Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) En déduire le signe de g(x) pour tout x de $]0, +\infty[$.

B- Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 2x - 2 - (x+1)\ln x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$: $f'(x) = g(x)$.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que l'équation $f(x) = x$, admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α, puis vérifier que

   $0{,}2 < \alpha < 0{,}25$.

4) Préciser la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Tracer (C).
5) a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

   b- Tracer dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative (C') de f^{-1}.

6) a- A l'aide d'une intégration par partie, calculer : $\int_1^e (x+1)\ln x\, dx$.

   b- Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = e$.