Lycée Pilote de Monastir Prof : Mahmoud Hassine Rochdi Younes	Devoir de Synthèse N° 2 Mathématiques

Classes: $4Sc_{1+2}$ Durée : 3Heures Date : 05/03/2014

Exercice N°1 : (3Pts)

http://mathematiques.kooli.me/

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) L'espace est muni d'un repère orthonormé direct. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u}.\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$

2) Pour tout réel $a \in]0,1[$ On a : $\int_a^{a^2} \frac{\ln x}{x^2+1} dx < 0$

3) La fonction $f: x \longmapsto |x|^{\frac{1}{|x|}}$ est prolongeable par continuité en 0

Exercice N°2 : (6Pts)

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace $\mathcal{E}$.

On considère les points A(1,1,0), B(−1,2,2) et C(−2,1,3).

1) a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   b) Déduire l'aire du triangle ABC.

   c) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est $x + z - 1 = 0$.

2) Soit Q le plan dont une équation cartésienne est: $x - z - 1 = 0$.

   a) Justifier que P⊥ Q.

   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de P et Q.

3) On considère l'ensemble S des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$.

   a) Justifier que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

   b) Démontrer que S et P sont sécants suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Soit t un paramètre réel appartient à $[0, \pi]$. Soient E, F et M les points de l'espace $\mathcal{E}$ tels que : E(2,0,−1), F(0,0,−1) et $M(1 + \cos^2 t; \sqrt{2}\sin t \cos t; -\cos^2 t)$

   a) Vérifier que E et F sont diamétralement opposés sur la sphère S.

   b) Calculer $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}$, Que peut-on conclure ?

   c) Vérifier que M∈P.

   d) Déduire sur quelle ligne varie M lorsque t varie ?

5) a) Montrer que $OM^2 = 1 + 4\cos^2 t$.

   b) Pour quelle valeur de t la distance OM^2 est-elle minimale ?

Exercice N°3 : (3Pts) http://mathematiques.kooli.me/

Pour tout $n \in$IN on pose $I_n = \int_0^1 x^{2n+1} e^{1-x^2}\, dx$

1) Calculer I_0
2) Montrer que pour tout $n \in$IN on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{2(n+1)}$

   En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.
3) a) Montrer que pour tout $n \in$IN on a : $I_{n+1} = -\frac{1}{2} + (n+1)I_n$

   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$
4) Calculer la valeur de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{x+x^7}{1+x^2} e^{1-x^2}\, dx$

Exercice N°4 : (4Pts)

1) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln x$.
   a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Montrer que pour tout $x \in]1,+\infty[$ on a : $1 + \ln x < x$.
2) Soit la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = \ln(1 + \ln x)$.
   a) Montrer que g est dérivable sur $[1,+\infty[$ et calculer $g'(x)$.
   b) Déduire $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{g(x)}{x-1}$
3) Soit G la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $G(x) = \int_{1+\ln x}^{x} \frac{dt}{\ln t}$ si $x > 1$ et $G(1) = 0$
   a) Montrer que pour tout $x \in]1,+\infty[$ on a : $\frac{x-1-\ln x}{\ln x} \leq G(x) \leq \frac{x-1-\ln x}{\ln(1+\ln x)}$
   b) En déduire que G est continue à droite en 1.

Exercice N°5 : (4Pts)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + \frac{2}{1+e^x}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier les variations de f.
   b) Montrer que le point I(0,1) est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$
2) a) Montrer que pour tout $x \in$ IR on a : $f(x) = x + 2 - \frac{2e^x}{1+e^x}$

   En déduire que la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$

   b) Montre que $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique dont on précisera une équation.
3) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur IR.
   b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]-2,-1[$

   Vérifier que $e^\alpha = -\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)$.
   c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur IR.

   Calculer $(f^{-1})'(1)$ et vérifier que $(f^{-1})'(0) = \frac{2}{\alpha^2+2\alpha+2}$
4) a) Construire dans un même repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$.
   b) Déterminer en fonction de α l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_{f^{-1}}$; l'axe des ordonnées et les droites d'équations $x = 1$ et $y = x$.

Bonne chance