| | | |
|---|---|---|
| Lycée Taher Sfar mahdia | Devoir de Synthèse N°2 | Classe 4 Sc exp |
| Profs : *Dermech Chiraz<br>* Mestiri Lotfi | En Mathématiques | AS 2022&2023<br>Durée : 3h |

**EXERCICE N°1** (5.5pts)

La directeur d'une salle de sport propose à ces clients trois activités sportifs : basket-ball, football et natation .

- ✓ 40% des clients sont des enfants.
- ✓ 30% des adultes choisissent le basket-ball.
- ✓ 16% des clients choisissent le football.
- ✓ 30% des clients sont des adultes et choisissent natation.
- ✓ 20% des clients sont des enfants et choisissent la natation.

On choisit un client au hasard.

Soient A « le client est un adulte ».

B « le client choisit le basket-ball ».

F « le client choisit football ».

N « le client choisit la natation ».

1)a) Calculer la probabilité de l'événement « le client pratique la natation sachant qu'il est adulte».

b) Déduire $p(F/A)=0,2$.

c) Calculer la probabilité de l'événement «le client est un enfant et choisit le football ».

2) Montrer que $p(N)=0,5$ et déduire que $p(B)=0,34$ .

3)On interroge successivement et au hasard n clients

a) Calculer en fonction de n la probabilité qu'exactement deux clients pratique le basket-ball.

b)Soit $p_n$ la probabilité qu'au moins un client pratique le basket-ball.

Déterminer le plus petit entier n pour que $p_n \geq 0.99$.

c) Déterminer n pour que le nombre moyen des clients qui pratiquent le basket-ball soit égale à 3,4 .

4) On choisit deux clients au hasard

Un client paye 20 **dt** s'il choisit la natation si non il paye 10dt .

Soit X la variable aléatoire qui a pour valeur le prix payé par ces deux clients

a) Déterminer les valeurs prise par X .

b)Déterminer la loi de probabilité de X et déterminer son espérance mathématiques.

c) Calculer $p(X > 20)$

***EXERCICE N°2*** *(6,5pts)*

*Le plan est rapporté à un repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *tel que* $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2\ cm$ .

*Soit la fonction f définie sur* $]-\infty;0[$ *par* $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ ,

*On désigne par* $\mathscr{C}_f$ *la courbe représentative.*

*1)a) Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = 1$. *Interpréter graphiquement les résultats obtenus.*

*b) Montrer que f est prolongeable par continuité à gauche en 0 .*

*2)a)Montrer que* $f'(x) = \frac{x-1}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$ .

*b)Dresser le tableau de variation de f sur* $]-\infty;0[$ .

*3) On donne h la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ \ x<0 \\ x\ln(1+x) & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$ .

*On désigne par* $\mathscr{C}_h$ *sa courbe représentative .*

*a) Montrer que h est continue en 0.*

*b) Etudier la dérivabilité de h en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.*

*4) a) Déterminer le signe de h sur* $\mathbb{R}$.

*b) Que représente l'origine du repère pour la courbe de h .*

*c) Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $h(x) = x$ .

*5) a) Recopié et compléter le tableau de variation de h*

| $x$ | $-\infty$ ..... $+\infty$ |
|---|---|
| $h'(x)$ | ..... 0 + |
| $h(x)$ | |

*b) Montrer que* $h$ *admet une fonction réciproque* $h^{-1}$ *définie sur un intervalle que l'on précisera.*

*c) Tracer* $\mathscr{C}_h$ *et* $\mathscr{C}_{h^{-1}}$ *dans* <u>*l'annexe1*</u>.

*6) On pose* $I = \int_0^{e-1} x\ln(x+1)\,dx$ *et* $J = \int_0^{e-1} \frac{x^2}{1+x}\,dx$ .

*a) Pour tout* $x \in [0;+\infty[$ *vérifier que* $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

*b) Calculer J .*

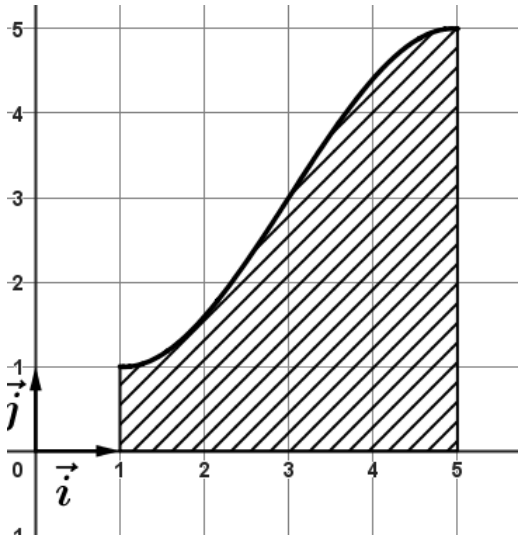
*c) A l'aide d'une intégration par partie montrer que* $I = \frac{(e-1)^2}{2} - \frac{1}{2}J$ .

*d) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par* $\mathscr{C}_h$ *et les droites d'équation* $x = 0$ *et* $x = e-1$ *et* $y = 0$ .

***EXERCICE N°3*** *(4pts)*

*Le plan est rapporté à un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *tel que* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 0,5\ cm$ .

*Ci-contre , la représentation graphique d'une fonction f deux fois dérivable sur* $[\,1,5\,]$ *telle que sa valeur moyenne sur* $[\,1,5\,]$ *est* $\overline{f} = 3$.




*1) Déterminer en cm² l'aire A de la partie hachurée.*

*2) Soit* $H(x) = \int_1^x (t-3)f'(t)dt$ *,pour tout* $x \in [1,5]$ .

*Montrer que H est dérivable sur* $[\,1,5\,]$ *et déterminer* $H'(x)$.

*3) On donne* $\int_1^3 f(t)dt = \frac{13}{4}$ .

*a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que* $H(3) = -\frac{5}{4}$ *et* $H(5) = 0$.

*b) En déduire le signe de H sur* $[\,1,5\,]$ .

***EXERCICE N°4*** *(4pts)*

*Soit la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $f(x) = \frac{a+b\ ln(x)}{x}$ *où* $a\,,b \in \mathbb{R}$ .

*Soit F la primitive de f qui s'annule en 1.*

*Dans l'annexe 2 ci-jointe, on a tracé dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$ , $\mathscr{C}_f$ *La courbes représentative de f et la droite* $\Delta$: $y = x$.

$\mathscr{C}_f$ *coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse* $\sqrt{e}$ *et la droite* $\Delta$ *au point d'abscisse 1 .*

*1) a) Exprimer en fonction de a et b ,* $f(1)$ *et* $f(\sqrt{e}\,)$.

*b) En déduire que* $f(x) = \dfrac{1-2\ ln(x)}{x}$ .

*2) Soit g la restriction de f à* $]0;\sqrt{e}]$ .

*a) Montrer que g réalise une bijection de* $]0;\sqrt{e}]$ *sur un intervalle que l'on précisera. (On note* $g^{-1}$ *la fonction réciproque de g et* $\mathscr{C}'$ *la courbe représentative de* $g^{-1}$ *).*

*b) Tracer* $\mathscr{C}'$ *et préciser* $(g^{-1})'(1)$ .

*3) Soit A l'aire (en* $u.a$*) du domaine limité par* $\mathscr{C}_f$ , $\mathscr{C}'$*, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.*

*a)* $\int_1^{\sqrt{e}} f(t)dt = \frac{1}{4}$.

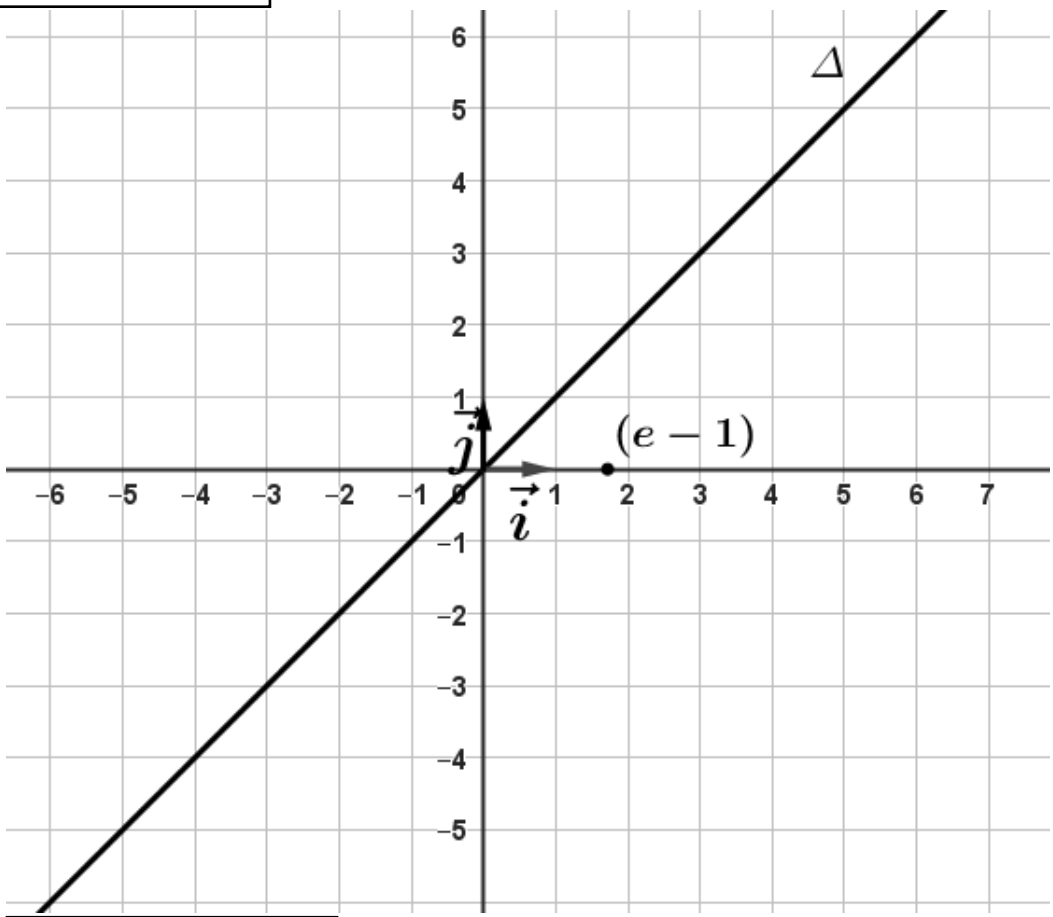
*b)En déduire la valeur de* $A$.

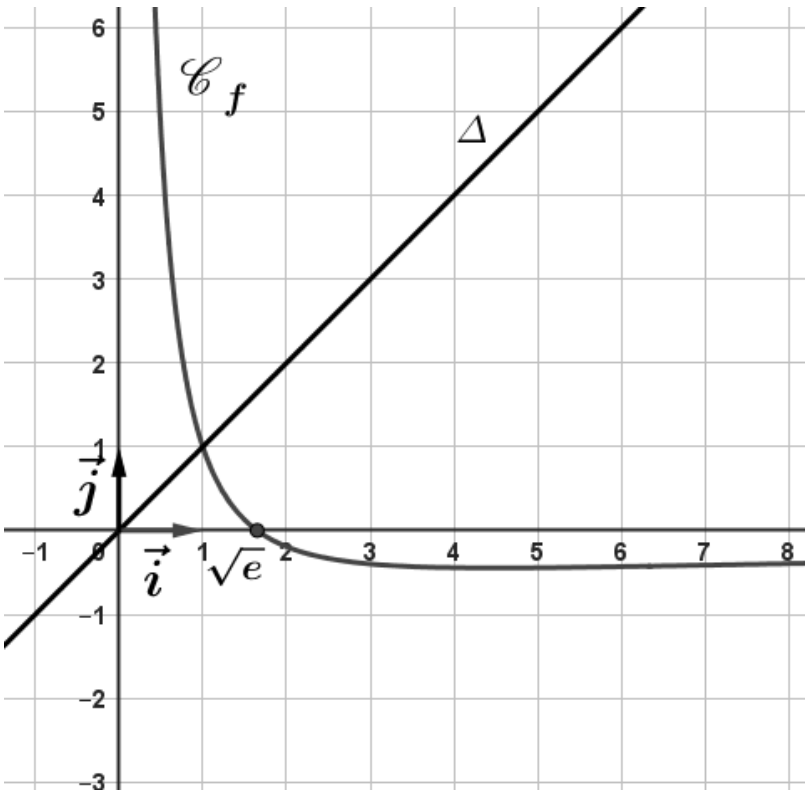
*c) Montrer que* $\int_1^e F(t).f(t)dt = 0$ .

*Feuille à rendre*

*Nom Prénom :* .....

*Annexe 1*




*Annexe 2*