| Lycée secondaire Bach Hamba - Bizerte | Classe :4ème Sciences expérimentales, | |
|---|---|---|
| Prof: Mme Bayoudh | Date : 06/03/2013 | Durée : 3 heures |
| Devoir de synthèse n °2 en mathématiques | Nom & prénom : | |

## Exercice1: (3 points)

***Pour chacune des questions suivantes une seule des trois propositions est exacte. Indiquer laquelle, aucune justification n'est demandée.***

1) Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{1 - lnx}$ est :

☐ $]0, +\infty[$ ☐ $]0, e]$ ☐ $[e, +\infty[$

2) La courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto x - lnx$ admet :

☐ La droite d'équation $y = x$ comme asymptote au voisinage de $(+\infty)$.

☐ Une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{\imath})$ au voisinage de $(+\infty)$.

☐ Une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $(+\infty)$.

3) La primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $lnx$ qui prend la valeur $(-1)$ en 1 est :

☐ $xlnx - 1$ ☐ $xlnx - x$ ☐ $\frac{x}{2}(lnx)^2 - 1$

4) L'ensemble des solutions dans $]0, +\infty[$ de l'équation $2(lnx)^2 - 3lnx + 1 = 0$ est :

☐ $\{1, e\}$ ☐ $\{e, \sqrt{e}\}$ ☐ $\left\{e, \frac{1}{e}\right\}$

## Exercice2: (5,5 points)

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et soit

$$S = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E} \ tels\ que\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0\}$$

1) Vérifier que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.

2) Soit $\mathcal{P}$ le plan dont une équation cartésienne est : $x + z - 1 = 0$

a/ Calculer la distance du point Ω au plan $\mathcal{P}$.

b/ En déduire que S et $\mathcal{P}$ sont sécant selon un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon r .

3) Soit $m$ un paramètre réel appartenant à l'intervalle [0,1]

Soient $A$ , $B$ et $N$ les points de $\mathcal{E}$ tels que :

$A(0,0,-1)$ ; $B(2,0-1)$ et $N(1+m\,,\ \sqrt{2m(1-m)}\,,\ -m)$

a/ Montrer que $A$ et $B$ sont diamétralement opposés sur la sphère S.

b/ Calculer $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB}$ et en déduire que $N \in S$.

c/ Vérifier que $N \in \mathcal{P}$

d/ En déduire l'ensemble des points N lorsque m varie dans [0,1]

4) a/ Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AN}$

b/ Pour quelle valeur de m les points $A$ , $B$ et $N$ sont alignés ?

c/ Calculer l'aire du triangle $ABN$ pour $m = 0$

**Exercice3:** **(5,5 points)**

Soit $f$ la fonction définie sur $Df = IR\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x^3-4x^2+2x-1}{(x-1)^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ .

1) a/ Vérifier que $f(x) = 2x - \frac{1}{(x-1)^2}$

   b/ Calculer les limites aux bornes de $Df$.

   c/ Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = 2x$ est une asympote à (C) au voisinage de $(\pm\infty)$

   d/ Etudier la position de (C) par rapport à $\Delta$ .

2) a/ Montrer que $f'(x) = 2(1 + \frac{1}{(x-1)^3})$

   b/ Dresser le tableau de variation de $f$

   c/ Tracer (C) et $\Delta$ .

3) a/ Déterminer une primitive $F$ de $f$ sur $]1,+\infty[$.

   b/ Peut on affirmer que $F$ est bijective sur $]1,+\infty[$ ? Justifier.

**Exercice4:** **(6points)**

A) Soit $g$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + lnx$

1) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

   b/ Etudier les variations de g.

2) a/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution $\alpha$ et que $0{,}27 < \alpha < 0{,}28$

   b/ Déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in ]0,+\infty[$

B) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{xlnx}{x+1} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

1) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b/ Montrer que $f$ est continue à droite en 0.

   c/ Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat./

2) a/ Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x > 0$ , $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ .

   b/ Vérifier que $f(\alpha) = -\alpha$

   c/ Dresser le tableau de variation de $f$

3) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter le résultat graphiquement.

   b/ Tracer la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ .

Bon travail et bonne chance http://mathematiques.tk/