Lycée secondaire Dar Chaabane El Fehri
PROFS: Mrs.:
KOUCH SOFIENE
LAATAOUI ABDELBASSET
CHELBI MED ALI

DEVOIR DE SYNTHESE N°2

CLASSES : 4 ème MATHS 1, 2 et 3
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 heures DATE : 06 MARS 2012

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4
L'annexe de la page 4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (3 pts)

Dans les deux questions suivantes , répondre par vrai ou faux , **en justifiant la réponse**

Question 1 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit f la similitude indirecte qui a tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=(2i)\bar{z}-1-i$, où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

a. Le rapport de f est 2
b. Le centre de f est le point d'affixe $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$
c. L'axe de f est la droite du plan d'équation cartésienne : $x-y=0$

Question 2 :

a. Le quotient de -2012 par -190 est 10
b. Pour tout entier non nul p , $p\wedge(2p+1)=|p|$
c. Pour tout entier naturel n, $5^{30n}-1$ est divisible par 31

Exercice 2 (5 pts)

Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

(Voir figure dans l'annexe de la page 4 qui sera complétée et rendue avec la copie).

Soit D le point du plan tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et soit K le symétrique de B par rapport à A.
On désigne par O, I et J les milieux respectifs des segments [AC], [BC] et [AD]

1. Soit S la similitude directe du plan telle que S(J) = B et S(D) = K
   a) Montrer qu'une mesure de l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$ et que le rapport est 2
   b) Montrer que C est le centre de la similitude S
2. Soit A' le symétrique de D par rapport à C et f l'antidéplacement du plan qui transforme D en A et A en A'
   a) Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques
   b) Montrer que f(K) = C
3. On pose $g=f\circ S$
   a) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport
   b) Déterminer $g\circ g(D)$
   c) On désigne par Δ l'axe de g et par Ω son centre. Montrer que $\overrightarrow{B\Omega}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BD}$
   d) Donner une construction de l'axe Δ de g

Exercice 3 (4 pts)

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 7x-4y=13$

1. a) Vérifier que le couple (3, 2) est une solution de (E)

   b) Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$

2. On pose pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $a=4n+3$ et $b=7n+2$

   a) Vérifier que tout entier qui divise a et b divise 13

   b) Montrer que $a\wedge b=13$ si et seulement si $n\equiv 9 (\mathrm{mod}\,13)$

3. a) Déterminer suivant l'entier naturel p, le reste modulo 13 de 10^p.

   b) Déterminer $a\wedge b$ lorsque $n=2012^{2012}$

4. Déterminer le couple d'entiers (a,b) tels que : $\begin{cases} 7a-4b=13 \\ a\wedge b=13 \\ 1956\leq b\leq 2012 \end{cases}$

Exercice 4 (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2-2\ln x-1$. On désigne par (ζ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe (ζ) dans le repère donné dans l'annexe de la page 4

2. Soit λ un réel de l'intervalle $]0,1]$ et $\mathcal{A}(\lambda)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (ζ) et les droites d'équations respectives $x=\lambda$, $x=1$ et $y=0$

   a) Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$

   b) Déduire que $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\mathcal{A}(\lambda)=\dfrac{4}{3}$

3. Soit n un entier naturel tel que $n\geq 2$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel $k\in[1,n-1]$ on a : $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)\leq\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\,dt\leq\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

   b) En déduire que : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)\leq\mathcal{A}\left(\dfrac{1}{n}\right)\leq\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

4. On pose pour tout entier $n\geq 2$, $S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

   a) Montrer que $\mathcal{A}\left(\dfrac{1}{n}\right)\leq S_n\leq\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)+\mathcal{A}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

   b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{4}{3}$

Exercice 5 (4 pts)

Dans la figure ci-dessous , le solide de révolution (Γ) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{\sqrt{x\left(1+\ln^2 x\right)}}$, $x\in\left[e,e^{\sqrt{3}}\right]$ autour de l'axe (Ox).

Le but de l'exercice est de calculer le volume $\mathcal{V}$ de ce solide.

1. Soit F la fonction définie sur $[e,+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t\left(1+\ln^2 t\right)}$

   Vérifier que $\mathcal{V}=\pi F\left(e^{\sqrt{3}}\right)$

2. Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\tan x$

   a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur IR $_+$

   b) On note g^{-1} sa fonction réciproque .

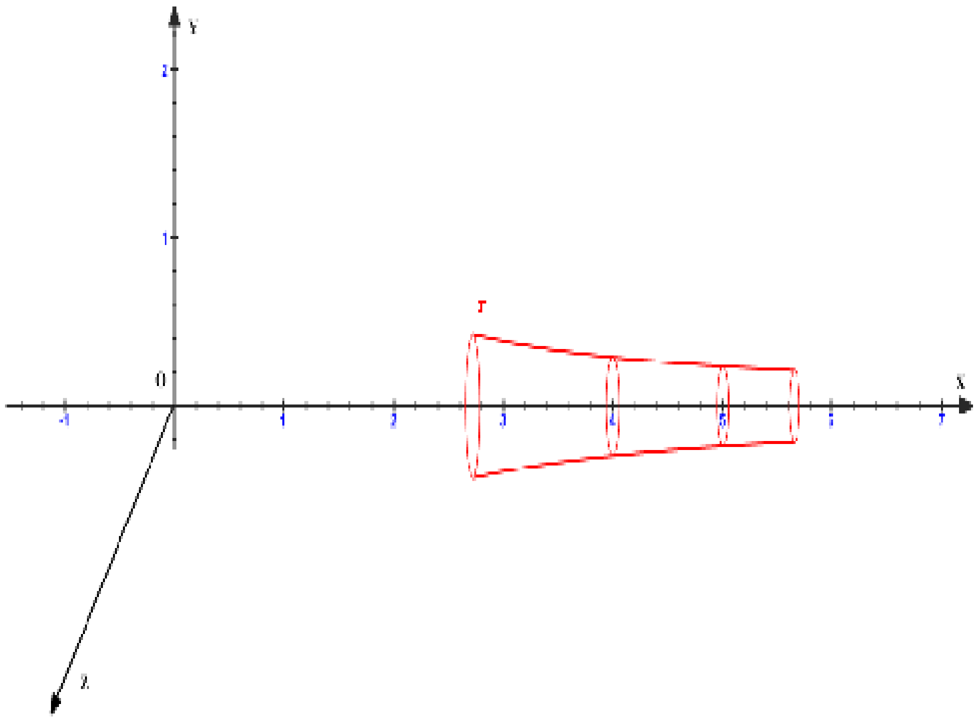
   Montrer que g^{-1} est dérivable sur IR $_+$ et que pour tout réel positif x , on a $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

3. On désigne par H la fonction définie sur $[e,+\infty[$ par $H(x)=\displaystyle\int_1^{\ln x}\frac{dt}{1+t^2}$.

   a) Calculer $H(e)$ et $H\left(e^{\sqrt{3}}\right)$. $\left(\text{On rappelle que } \ln\left(e^{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}\right)$

   b) Montrer que H est dérivable sur $[e,+\infty[$ et que $H'(x)=\dfrac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$

   c) En déduire que pour tour réel $x\geq e$, $F(x)=H(x)$, puis calculer le volume $\mathcal{V}$



Annexe du devoir de synthèse n°2

Nom et prénom : ………………………………………………………………………………….

Figure de l'exercice 2

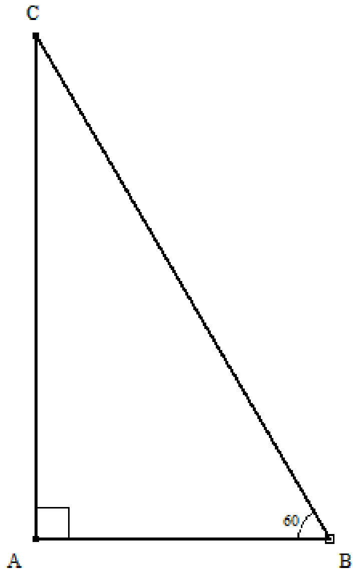


Figure de l'exercice 4