- Lycée Al-emtièz Moularès

~ DEUXIEME DEVOIR DE SYNTHESE ~

Le Mardi 06/03/2012 à 8 h. Durée : 4 heures

- Exercice 1 -

1.5 points

L'élève indique sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse correcte

1. Soit t un réel non nul, l'ensemble des points $M\left(t+\frac{1}{t}, \frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)$ est :

(a) Une parabole. (b) Une ellipse. (c) Une hyperbole.

2. Le reste modulo 5 de $(2222)^{3333}+(3333)^{2222}$ est :

(a) 0. (b) 1. (c) 4.

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{\ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}{x^2}=$

(a) 0. (b) 1. (c) $+\infty$.

- Exercice 2 -

4 points

Soit n un entier naturel non nul. Soit g_n la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par

$$g_n(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{x^n}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de g_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. (a) Etudier la dérivabilité de g_n en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
   (b) Dresser le tableau de variation de g_n.
   (c) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_n$. Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
2. Soit a un réel de $]1,+\infty[$. Calculer une mesure de l'aire I_a de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_1$ et les droites $(O,\vec{i})$, $x=1$ et $x=a$.
3. On pose

$$S_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{\sqrt{\ln\left(1+\frac{k}{2n}\right)}}{k+2n}.$$

   (a) Montrer que pour tout $k\in\{0,1,2,...,n-1\}$, on a :

$$\frac{1}{2n}g_1\left(1+\frac{k}{2n}\right)\leq\int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}}g_1(x)dx\leq\frac{1}{2n}g_1\left(1+\frac{k+1}{2n}\right).$$

   (b) En déduire que $S_n-\frac{1}{2n}g_1\left(\frac{3}{2}\right)\leq I\left(\frac{3}{2}\right)\leq S_n$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

- EXERCICE 3 -

5 points

Le plan est rapporté d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

[-I-] Soit $\mathscr{H} = \{M(x,y) \in \wp \text{ tel que } 4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0\}$.

$\boxed{1}$ Caractériser $\mathscr{H}$.

$\boxed{2}$ Soit $\Omega(-2,1)$ et $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

(a) Montrer que $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan et donner une équation de ($\mathscr{H}$ dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

(b) représenter alors $\mathscr{H}$.

[-II-] Soit OFB un triangle rectangle en O tel que $OF = 6$ et $\widehat{OBF} \equiv \dfrac{\pi}{6}\,[2\pi]$ et soit M un point du plan, Les parallèles à (OF) et (FB) menées de M qui coupent (OB) respectivement en H et M'. Soit Γ l'ensemble des points M tels que $MF = MM'$.

$\boxed{1}$ (a) Montrer que $M \in \Gamma$ si et seulement si $\dfrac{MF}{MH} = 2$. En déduire la nature de Γ.

(b) Donner l'équation réduite de Γ dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ tel que $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{OF}$.

(c) Donner tous les caractéristiques de Γ puis construire Γ.

$\boxed{2}$ Soit $A\left(3, 3\sqrt{3}\right)$. Vérifier que $A \in \Gamma$ et ecrire une équation de la tangente à Γ en A.

$\boxed{3}$ Soit $\mathscr{D}$ le domaine limité par Γ, les droites : $x = 2$ et $x = 3$. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de $\mathscr{D}$ autour de l'axe des abscisses.✯

- EXERCICE 4 -

4 points

$\boxed{1}$ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ vérifiant : $a^{2n} + b^{2n} = c^{2n}$.

(a) Montrer $ab \equiv 0 \pmod 3$.

(b) On suppose que l'entier $2n + 1$ est premier, montrer que $2n + 1$ divise ab.

$\boxed{2}$ Trouver les couples (α, β) d'entiers naturels tels que $0 < \alpha < \beta$ dont le PGCD d et le PPCM m vérifient : $2m + 3d = 78$ et tels que α ne soit pas un diviseur de β.

$\boxed{3}$ (a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $44x - 5y = 2$.

(b) On considère les entiers n, a ,b et c tels que $n = 4a + 2 = 11b + 2 = 5c + 4$.

i. Montrer qu'il existe un entier p telque $a = 11p$ en déduire que $44p - 5c = 2$.

ii. Résoudre alors le système $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 4 \\ x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$. ✯

- EXERCICE 5 -

5.5 points

Dans la courbe ci-jointe on a représenté dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f et la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 qui coupe $(O, \vec{j})$ en un point d'abscisse $-\dfrac{1}{4}$.

$\boxed{1}$ ***Par lecture graphique*** :

(a) Dresser le tableau de variation de f.

(b) Déterminer $f'(1)$.

$\boxed{2}$ On suppose que $f(x)=\dfrac{\ln x}{(1+x^2)^2}$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.

– Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.

$\boxed{3}$ Soit la fonction $\mathcal{F}$ définie par $\mathcal{F}(x)=\displaystyle\int_{1/x}^{x} f(t)dt$, pour tout $x>0$ et soit la fonction h définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $h(x)=\tan x$.

(a) Montrer que $\mathcal{F}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$\mathcal{F}'(x)=\frac{(1-x^2)\ln x}{(1+x^2)^2}$$

.

(b) Montrer que h réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$, soit h^{-1} sa fonction réciproque, montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a : $\left(h^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(c) Montrer que pour $x>0$,

$$\mathcal{F}(x)=\frac{1}{2}\left[h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)-h^{-1}(x)\right]+\frac{x\ln x}{1+x^2}.$$

(d) Déduire de ce que précéde $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathcal{F}(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathcal{F}(x)$.

(e) Dresser le tableau de variation de $\mathcal{F}$.

$\boxed{4}$ Soit Ψ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par par $\Psi(x)=\mathcal{F}(x)$ si $x>0$ et $\Psi(0)=\dfrac{\pi}{4}$. Donner une allure Γ de la courbe de Ψ.

$\boxed{5}$ Donner une valeur approchée de l'aire de la partie hachurée indiquée dans la figure.$\star$