LYCÉE HAMMOUDA P.

DEVOIR DE SYNTHÈSE # 2.

ANNÉE SCOLAIRE 2011–2012

Pr : Ben fredj sofiane

Le devoir dure 4 heures. Les calculatrices sont autorisées, mais : l'échange de tout matériel est interdit
Les brouillons ne sont pas acceptés dans les copies. Une copie non soignée sera sanctionnée.

EXERCICE 1 (4 points). .

1– On considère l'équation $(E) : 4x - 5y = 1$. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E), en remarquant que $(-1, -1)$ est une solution particulière de (E).

2– On pose $a = 4n + 3$ et $b = 3n + 1$ où n est un entier naturel et soit $d = a \wedge b$

(a) Déterminer les valeurs possibles de d.

(b) Montrer que $d = 5$ si et seulement si, $n \equiv 3 \pmod 5$.

(c) Déterminer suivant les valeurs de l'entier n, les restes modulo 5 de 2^n.

(d) Déterminer le plus petit entier $n > 2012$ tels que : $\begin{cases} a \wedge b = 5 \\ 2^a + 3^b \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$

EXERCICE 2 (5 points). ABC est un triangle isocèle en A tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Soit I le milieu du segment $[BC]$ et J le prcjeté orthogonal de B sur (AC). Soit s la similitude indirecte de centre C telle que $s(A) = B$.

1– Montrer que le rapport de s est $\sqrt{3}$, puis préciser son l'axe.

2– Soit $B' = s(B)$.

(a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $s \circ s$.

(b) En déduire que $\overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{CA}$. Construire B'.

(c) Montrer que $BB' = BC$ puis déduire que $s(I) = J$.

3– On muni le plan par le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u})$ et soit s' la transformation du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -i\sqrt{3}\bar{z} + 1$.

(a) Donner sous forme exponentielle puis sous forme crtésienne, l'affixe de C.

(b) Montrer que $s'(C) = C$ et $s'(A) = B$ puis déduire la nature et les éléments caractéristiques de s'.

(c) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $s' \circ S_{(BC)}$ où $S_{(BC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (BC).

EXERCICE 3 (7 points). . Soit f la fonction définie par :

$$f(0) = 0 \text{ et pour tout réel } x \neq 0,\ f(x) = \frac{x}{1 + x\ln x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1– Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x\ln x$.
Étudier le sens de variation de g puis déduire son signe pour $x > 0$.

2– (a) Montrer que f est définie sur $[0,+\infty[$
(b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
(c) Montrer que $f'(x)$ est de signe de $1 - x$ puis étudier les variations de f.
Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$.
(d) Tracer D et $\mathscr{C}$. (unité graphique est 2 cm)

3– Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $[0,1]$.
(a) Montrer que φ possède une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
(b) Étudier la dérivabilité de φ^{-1}.
(c) Tracer la courbe Γ de φ^{-1}

4– Soit u un réel de l'intervalle $]0,1]$. On pose $\mathscr{A}(u) = \int_u^1 f(t)dt + \int_{f(u)}^1 \varphi^{-1}(t)dt$
(a) Interpréter graphiquement le nombre $\mathscr{A}(u)$
(b) Calculer $\lim\limits_{u\to 0^+} \mathscr{A}(u)$

5– On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier $n \geq 0$ $U_{n+1} = f(U_n)$.
(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 < U_n \leq 1$.
(b) Montrer que la suite (U_n) est convergente.
(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
(d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_n\right) = \dfrac{1}{e}$
(e) Pour tout entier naturel n, On note V_n la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[U_n, U_{n+1}]$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

EXERCICE 4 (4 points). Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Dans la figure donnée (voir feuille annexe), on donner la courbe (C) représentative de la fonction

$$F : x \to \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{1}{2}\ln x.$$

On note γ le cercle de centre O et de rayon et de rayon 1.

Pour tout réel $t > 0$, on note M le point de (C) d'abscisse t et soit H son prcjeté orthogonal sur l'axe des abscisses et soit A le point de coordonnées $(0,1)$. Soit K le second point d'intersection de (AH) et le cercle γ.

1– Montrer que les coordonnées de K sont $\left(\dfrac{2t}{t^2+1}, \dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)$

2– (a) Montrer que (OK) est parallèle au tangente T_t à (C) au point d'abscisse t.
(b) Donner un procédé de construction géométrique de la tangente T_2 à (C) au point d'abscisse 2.
(c) Construire T_2

3– Déterminer toutes les fonction G dérivable sur $]1,+\infty[$ dont la tangente à leurs courbes représentatives au point d'abscisse t soit perpendiculaire à (OK) où K est le second point d'intersection du cercle γ et (AH) où H est le prcjeté orthogonale de M sur l'axe des abscisses.

Feuille annexe

Nom :....................

Prénom :..................