M AYACHE	Devoir de Synthèse N^{o}2	Durée : 4 H
Lycée De Sousse	Épreuve : Mathématique	4 M$_2$

Exercice 1:

Répondre par « Vraie » ou « Faux », en justifiant :

1. $2011^{2012} \equiv 2$ (mod 12).

2. $3^{2012}+4^{2012}+5^{2012} \equiv 3$ (mod 7).

3. $4^{2n}+(-1)^{n+1} \equiv 0$ (mod 17).

4. L'équation $8x \equiv 3$ (mod 12) admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 2:

1. Soit (E) l'équation dans $\mathbb{Z}^2 : 4x-7y=28$.

a) Montrr que si (x,y) est une solution de (E) alors $x \equiv 0 \pmod 7$.

b) En déduire les solutions de (E).

2. Soit (S) le système défini sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \end{cases}$

a) Vérifier que 19 est une solution de (S).

b) En déduire les solutions de (S).

3. a) Déterminr le reste 3^{6k} modulo 4 et le reste 5^{6k} modulo 7.

b) Montrer que 2007 est une solution de (S).

c) Montrer que $(2007)^{2010} \equiv 1$ (mod 28). En déduire le reste dans la division euclidienne de $(2007)^{2012}$ par 28.

Exercice 3:

Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} F(0)=\ln 2 \\ F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}\,dt \ \text{ si } x>0 \end{cases}$

1. a) En remarquant $\forall u \geqslant 0,\ 0 \leqslant e^{-u} \leqslant 1$, montrer que $\forall x \geqslant 0,\ 1-x \leqslant e^{-x} \leqslant 1$.

b) En déduire que $\forall t \geqslant 0$, on a : $t-\dfrac{1}{2}t^2 \leqslant 1-e^{-t} \leqslant t$.

c) Déduire de ce qui précède que $\forall x>0$, on a : $1-\dfrac{3}{4}x \leqslant \dfrac{\ln 2-F(x)}{x} \leqslant 1$.

d) Montrer que F est dérivable à droite en zéro et que $F'(0)=-1$.

2. a) Montrer que $\forall x>0$ et $\forall t \in [x,2x],\ 0 \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{x}$. En déduire que $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{x}$.

b) Montrer que $\forall x>0$, on a : $0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

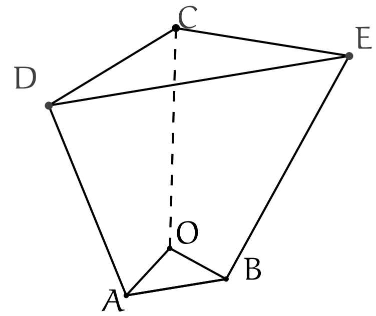
3. a) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x>0$.

b) Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de la courbe représentative de F.

4. a) Montrer que F est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,\ln 2[$.

b) Etudier la dérivabilité de F^{-1} et calculer $(F^{-1})'(\ln 2)$.

Exercice 4:



1. Dans la figure ci-contre, on donne le prisme à base triangulaire $OABCDE$, on suppose que l'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\frac{1}{2}\overrightarrow{OC})$.
On suppose de plus que $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{OB}$.

2. Déterminer les coordonnées de chacun des points D et E.

3. a) Déterminer une représentation paramétrique de chacun des droites (AD) et (BE).

b) Déduire que les droites (AD) et (BE) se coupent en $I(0,0,-1)$.

c) Justifier que les points O, C et I sont alignés.

4. Soit h l'homothétie de centre I qui transforme A en D.

a) Déterminer le rapport de h.

b) vérifier que $h(O)=C$ et $h(B)=E$.

c) Calculer le volume de chacun des tétraèdres $IOAB$ et $ICDE$ puis déduire celui du prisme à base triangulaire $OABCDE$.

5. Soit $(S): x^2+y^2+z^2+2z-1=0$.

a) Montrer que (S) est une sphère de centre I et passant par A.

b) Déterminer l'intersection de la sphère (S) et le plan (OAB).

c) Déterminer $(S')=h(S)$ et l'intersection de (S') et le plan (CDE).

Exercice 5:

Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB=AC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
Soit M un point de la médiatrice de $[AB]$ tel que les droites (AM) et (AC) ne soient pas perpendiculaires. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre M et passant par A, $(\mathscr{C})$ coupe la droite (AC) en N.

1. a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BN}})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

b) Soit f la similitude directe de centre B qui envoie M sur N. Déterminer son angle α et montrer que son rapport vaut $\sqrt{3}$.

2. Soit $C'=f(C)$ et $B'=S_{(AC)}(B)$.

a) Montrer que C', B et A sont alignés et montrer que $f(A)=B'$.

b) Montrer que le cercle de centre N et de rayon NB passe par un point fixe autre que B lorsque N varie.

3. Soit E le point de la demi-droite $[BA)$ tel que $BC=BE$ et soit Δ la médiatrice de $[CE]$, soit $\varphi=f\circ S_\Delta$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte dont on déterminera le centre et le rapport.

b) Vérifier que $\varphi(E)=C'$. Déduire la forme réduite de φ.