

Mr Hédi Ayache	Devoir de synthèse N°2	Durée : 4 H
4M	Épreuve : Mathématiques	Fév 2010

Exercice 1:

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et f la fonction logarithme népérien notée \ln .
 - Montrer que pour tout $t \in [x, x+1]$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq f'(t) \leq \frac{1}{x}$.
 - En déduire que pour $x > 0$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 - Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \leq u_n$.
 - Déduire un encadrement de u_n puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.
- Montrer que pour $t \geq 0$, on a : $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.
 - Déduire que pour $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
- On pose $v_n = \frac{n^n}{n!}$.
 - Montrer que $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
 - Justifier que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.
 - Déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n - \frac{1}{2}u_n \leq \ln(v_{n+1}) \leq n$. montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(v_n)}{n} = 1$.
- On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.
 - Montrer que $\ln(w_n) = \frac{\ln(v_n)}{n}$.
 - Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = 1$.

Exercice 2:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la similitude indirecte qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -2i\bar{z} + 6$ où \bar{z} désigne le conjugué de z .

- Déterminer le rapport de f .
- Montre que f admet un seul point invariant, on le note I . Calculer son affixe.
- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM}$. En déduire une équation de l'axe de f .
- Caractériser $f \circ f$.

Exercice 3:

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

on considère l'ellipse (\mathcal{E}) d'équation : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(2 \cos \theta, \sin \theta)$, ou θ est un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. a) Déterminer, par leurs coordonnées les sommets et les foyers de (\mathcal{E}) .
b) Tracer (\mathcal{E}) et placer ses foyers.
c) Vérifier que le point M appartient à (\mathcal{E}) .

2. Soit (T_M) la tangente à (\mathcal{E}) en M .

Montrer qu'une équation de (T_M) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est : $x \cos \theta + 2y \sin \theta - 2 = 0$.

3. Soit $A(2, 0)$ et $A'(-2, 0)$ les sommets principaux de (\mathcal{E}) . (sommets du grand axe).

On désigne respectivement par (T) et (T') les tangentes à (\mathcal{E}) en A et A' . On désigne respectivement par P et P' les points d'intersections de (T_M) avec les tangents (T) et (T') .

- a) Donner les coordonnées des points P et P' .
b) Montrer que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{A'P'} = 1$.

Exercice 4:

Dans le plan orienté \mathcal{P} . On donne un carré $ABCD$ de centre O tel que $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

S_1 est la similitude directe de centre C qui envoie D sur A .

1. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S_1 .
2. On note B' l'image du point B par S_1 .
a) Montrer que $S_1 \langle (DB) \rangle = (AB)$.
b) Montrer que la droite (CB') est tangente au cercle circonscrit au carré $ABCD$.
c) Construire alors le point B' .
3. S_2 est la similitude directe qui transforme O en A et A en B .
a) Déterminer et construire $B_1 = S_2(C)$.
b) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S_2 .
c) En déduire que $S_2 \circ S_1$ est une homothétie dont on déterminera le rapport.
4. Soit E le milieu du segment $[DC]$, la droite (AE) la droite (DB) en I . Montrer que les points C, I et B_1 sont alignés.
5. On note Ω le centre de S_2 .
a) Montrer que Ω appartient au cercle passant par A et B et tangente à (AC) .
b) Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[OB]$. Construire alors Ω .