Devoir De Synthèse N°1

Mathématiques

Exercice 1 (3 points)

- *Répondre par **Vrai** ou **Faux** à Chacune des propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.*
- *Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.*

1) A, B et C sont trois points distincts deux à deux d'affixes respectives z_A , z_B *et* z_C telles que $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ alors le triangle ABC est rectangle et isocèle.

2) Un argument du nombre complexe $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est $-\dfrac{\pi}{3}$

3) $i^{2009} = i$

4) Soit f une fonction dérivable sur $[1,\ 4]$ telle que $|f'(x)| \le 5$ pour $x \in [1,\ 4]$ alors $|f(4) - f(1)| \le 15$

5) L'image de $[1, +\infty[$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} + 2$ est $[0, +\infty[$

6) La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 - x^2$ admet un point d'inflexion d'abscisse (-1)

Exercice 2 (6 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - (3+5i)z - 2 + 4i = 0$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : 2z^3 - (7+5i)z^2 + (4+14i)z + 4 - 8i = 0$$

a) Vérifier que 2 est une solution de (E)

b) Résoudre alors l'équation (E)

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives :

$$z_A = 2 \quad ; \quad z_B = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \quad \text{et} \quad z_C = 1 + i$$

a) Montrer que les triangles *OBC* et OAC sont rectangle en *C*.

b) En déduire que les points A, B et C sont alignés.

4) A tout point M d'affixe z on associe le point *M'* d'affixe z'

tel que $z' = -\dfrac{1}{2}z + \dfrac{3}{2}(1+i)$.

a) Montrer que $\dfrac{z' - z_C}{z - z_C} = -\dfrac{1}{2}$

b) En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

Exercice 3 (7 points)

On a représenté ci-dessous le tableau de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
g	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

I) 1) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.

2) Vérifier que $\alpha \in \left]2,\ 3\right[$

3) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$

II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + 5}{x^2 - 1}$

$(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

b) Interpréter graphiquement les résultats.

2) Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

3) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et prouver que

$$f'(x) = \frac{2x \cdot g(x)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$$

b) Dresser le tableau de variation de *f*.

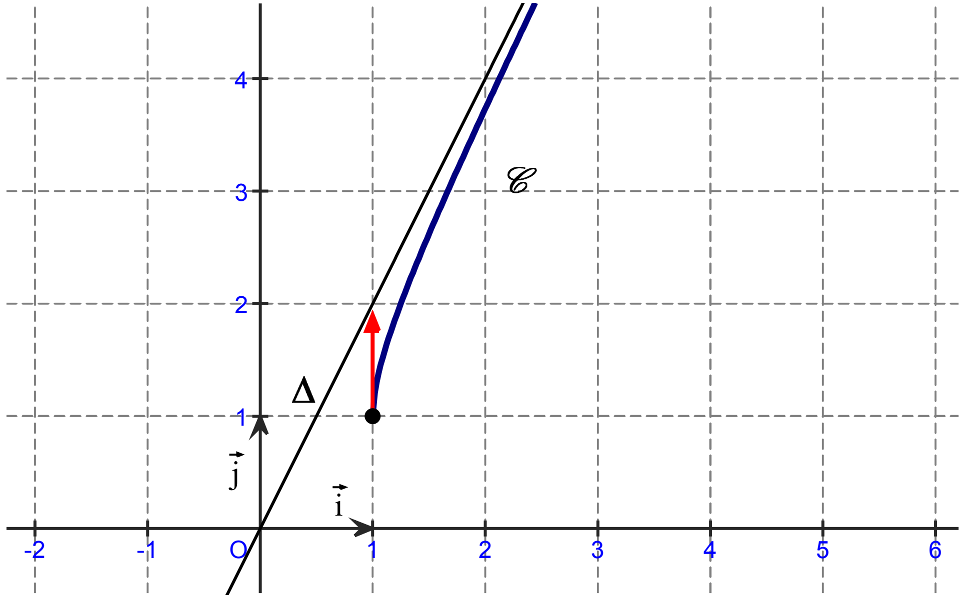
Exercice 4 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente une fonction f définie sur $[1, +\infty[$.

On suppose que la courbe $(\mathscr{C})$ admet :

- Une asymptote Δ d'équation $y = 2x$ au voisinage de $+\infty$.
- Une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.



1) Donner par une lecture graphique :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - 1}{x - 1}$

b) Le tableau de variation de f

2) Montrer que f est une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Reproduire le graphique et tracer la courbe de f^{-1}.

4) On admet que $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

Déterminer $f^{-1}(x)$.