Devoir de synthèse N°1

Exercice 1 : *(4pts)*

Indiquer la bonne réponse :

1) ***Soit f une fonction dérivable sur [1, 4] telle que $|f'(x)| \leq 5$ pour x $\in$ [1, 4] alors***
   a) $|f(4) - f(1)| \leq 5$
   b) $|f(4) - f(1)| \leq 15$
   c) $|f(4) - f(1)| \leq 25$
2) ***l'équation $z^2+(1-i)z+1=0$ admet deux solution :***
   a) opposées
   b) conjuguées
   c) inverses.
3) ***Soient les points A et B d'affixes respectives 1+ i et 1- i .***
   L'ensemble des points M d'affixes z tel que : $|z - 1 - i|= 3$ est :
   a) Le cercle de centre A et de rayon 3
   b) Le cercle de centre B et de rayon 3
   c) La médiatrice de [AB].
4) ***L'équation $z^2 -(1+2i)z+i=0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions z' et z'' qui vérifient :***
   a) $z' \times z''= -i$
   b) $|z'| = |z''|$
   c) $z' + z''= 1+2i$

Exercice 2 : *(7pts)*

Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par $f(x)= \sqrt{1+\frac{1}{x}}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé ($O,\vec{i},\vec{j}$)

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   b) Interpréter graphiquement les deux résultats.
2) a) Montrer que f est dérivable sur]0,+∞[et pour tout réel x ∈]0,+∞[on a : $f'(x)= \frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Tracer (C_f) dans le repère orthonormé ($O,\vec{i},\vec{j}$).
3) Soit la fonction h(x)= f(x)-x
   a) Dresser le tableau de variation de h.
   b) Montrer que l'équation f(x)=x admet dans]0,+∞[une unique solution $\propto$
   c) Vérifier et que $1<\propto<\sqrt{2}$
4) a) Montrer que f réalise une bijection de]0,+∞[sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Tracer dans le même repère (C_f^{-1}) la courbe de f^{-1}.
   c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x ∈ J.

Exercice 3 : *(5pts)*

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(1+i)z+i=0$
2) Soit $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$ on considère l'équation dans $\mathbb{C}$. E_θ :$z^2-2\,e^{i\theta}\cos\theta\, z + e^{i2\theta}=0$
   a) Vérifier que 1 est une solution de E_θ .
   b) En déduire l'autre solution de E_θ.
3) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé.
   On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et $e^{i2\theta}$
   a)Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un losange.
   b) Déterminer la valeur de θ pour que la mesure de l'aire du losange OACB soit égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 4 : *(4pts)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

La courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie sur [1,+∞[.

On suppose que la courbe (C) admet :

Une asymptote Δ d'équation y = 2x au voisinage de +∞.

Une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

1) Donner par une lecture graphique :
   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-1}{x-1}$
   b) Le tableau de variation de f
2) Montrer que f est une bijection de [1,+∞[sur un intervalle J que l'on précisera.
3) Reproduire le graphique et tracer la courbe de f^{-1}.
4) On admet que $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$
   Déterminer $f^{-1}(x)$