Exercice n ° 1 (4 points)

A) (QCM) *Pour chaque question choisir la seule réponse correcte* ***avec justification***

1°) Le nombre complexe $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ a pour argument

a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$

2°) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $(-1); 1+2i; 3\ et\ (-3i)$. Alors on a :

a) Les vecteurs $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BD}$

b) ABCD est un parallélogramme

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

3°) Le nombre $\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^{2013}$

a) est un réel

b) est un imaginaire pur

c)est égal a $-\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}$

4°) Soit f une bijection d'un intervalle ouvert I sur f(I) et f est dérivable sur I et f^{-1} sa réciproque, soit $a \in I$

a)si f admet un extremum local en a alors f^{-1} admet un extremum local en *f(a)*

b) $f'(a)\ et\ \left(f^{-1}\right)'(f^{-1}(a))$ de même signe

c) si f est strictement croissant sur I alors f^{-1} est strictement décroissant sur *f(I)*

Exercice n ° 2 (6 points)

1°)a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(E) :$z^2 - \sqrt{2}\,z + 1 = 0$

b) Ecrire chaque solution sous forme exponentielle.

2°) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) : $e^{-i\theta}z^2 - \sqrt{2}\,z + e^{i\theta} = 0$ $\left(\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right)$

a)On désigne par z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_θ)

Sans calculer z_1 et z_2, Déterminer A $=z_1^2+z_2^2$ et B$=z_1^3+z_2^3$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

c) Déterminer θ pour que (E_θ) admet une solution imaginaire pure et une solution réel.

3°)a) Déterminer les racines cubiques de $(1+i)\ et\ (1-i)$

b) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation(E') :$z^6 - \sqrt{2}\,z^3 + 1 = 0$ posons $Z = z^3$
Montrer que si Z est solution de l'équation (E) alors z est solution de l'équation(E')

c)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(E')

Exercice n °3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{-1}{2} ; \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1 + \sin(\pi x)$

1°) Montrer que f réalise une bijection de de I sur $f(I) = [0; 2]$

2°) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f

a)Dresser le tableau de variation de f^{-1}

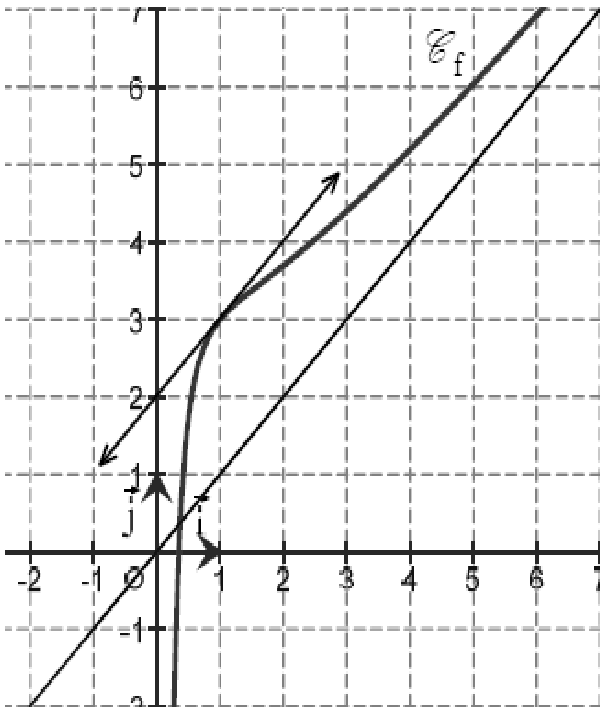
b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0; 2[$ et pour tout x de $]0; 2[$ $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$

3°) On pose pour tout x de $[0; 2]$; $g(x) = f^{-1}(2 - x) + f^{-1}(x)$

a)Montrer que g est dérivable sur $]0; 2[$, puis Calculer $g'(x)$

b) En déduire que pour tout x de $[0; 2]$ $f^{-1}(2 - x) = -f^{-1}(x)$

Exercice n °4 (5 points)



A) Les questions posées seront résolues par lecture graphique avec justification

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre représente une fonction f définie sur $]0; +\infty[$

1°) a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

b) Déterminer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0; 1[$

2°)a) Montrer que f réalise une bijection de I=$]0; +\infty[$ sur $f(I)$

b) soit f^{-1} la fonction réciproque de f définie sur $f(I)$

Calculer $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x)$

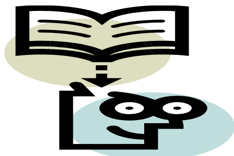
3°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

g(x) = $\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) cos(x)$

a)Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $|g(x)| \leq \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$,

En deduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f^{-1} o g(x)$



BON TRAVAIL