Lycée pilote 15 octobre BIZERTE 4ème Sci-Exp 1+2	**Devoir deSynthèse N°1** **Mathématiques**	*Prof : Mmes Fatma Bayoudh & Hajer GALAÏ* Durée :2h *Décembre 2014.*

- **Exercice 1 :** (6 POINTS) http://mathematiques.kooli.me/

Soit la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ *par* $f(x)=2+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

1) a/Etudier les variations de f.
   b/Montrer que pour tout $x\in[2\,;3], f(x)\in[2\,;3]$.
   c/Montrer que pour tout $x\in[2\,;3]$, *on a* $|f'(x)|\le\frac{1}{4}$.
2) a/Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans $]1;+\infty[$ et vérifier que $\alpha\in]2\,;3[$.
   b/Montrer que $(\alpha-2)^2(\alpha-1)=\frac{1}{4}$.
3) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=2\\ u_{n+1}-2=\frac{1}{2\sqrt{u_n-1}}\end{cases}$
   a/Montrer que pour tout $n\in IN,\ 2\le u_n\le 3$.
   b/Montrer que pour tout $\in IN$,$|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$.
   c/En déduire que pour tout $n\in IN$, $|u_n-\alpha|\le(\frac{1}{4})^n$.
   d/Déduire $\lim\limits_{n\to-\infty}u_n$.

- **Exercice 2 :** (3 points)**VRAI ou FAUX** *Justifier votre choix !*

1) Si la suite (v_n) telle que $v_n={u_n}^2$ est convergente alors (u_n) est convergente.

2) $\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{3^n+4^n}{2^n+4^n}=+\infty$.

3) Si z_1 est une racine sixième de –i et z_2 est une racine cubique de i alors $z_1\times z_2$ est une racine sixième de 1.

4) Soit la fonction f telle que $f(x)=(x-3)\sqrt{x-1}$.
La courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet au moins une tangente horizontale.

- **Exercice 3 :** (5,5 points) http://mathematiques.kooli.me/

1) Résoudre dans C, l'équation $z^2-(1+3i)z-4=0$.
2) On considère l'équation (E) :$z^3-(1+i)z^2-(2i-2)z-8i=0$.
   a/Montrer que l'équation (E) possède une solution imaginaire pure qu'on notera z_0.
   b/Déterminer les nombres complexes a et b tels que
   $$\boldsymbol{z^3-(1+i)z^2-(2i-2)z-8i=(z+2i)(z^2+az+b).}$$
   c/Résoudre alors l'équation (E) dans C.
3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, B et C les points d'affixes :
$$\boldsymbol{z_A=-1+i\,,z_B=-2i\,,z_C=2+2i.}$$
   a/Ecrire sous forme exponentielle $\boldsymbol{z_A\,,z_B}$ ***et*** $\boldsymbol{z_C}$.
   b/Calculer $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$. Déduire la nature du triangle ABC.
   c/Déterminer les ensembles suivants :
   $$\mathcal{E}=\{M(z)\,tel\ que\ |\bar{z}-2i|=|z+1-i|\}$$
   $$\mathcal{F}=\{M(z)\ tel\ que\ \arg(z+2i)\equiv\arg(z-2-2i)[2\pi]\}.$$

- **Exercice 4 :** (5,5 points)

Soit la fonction f définie sur I=$[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$ *par* $f(x)=1+\sin(\pi x)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
2) Soit f^{-1}la fonction réciproque de f.
   a/Dresser le tableau de variation de f^{-1} et calculer $f^{-1}(1)$.
   b/Préciser la demi-tangente à la courbe de f en son point d'abscisse$-\frac{1}{2}$.

Déduire que f^{-1} n'est pas dérivable à droite en 0.
   c/Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0\,;2[$ et pour tout x de $]0\,;2[$
$\boldsymbol{(f^{-1})'(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}}$.
3) On pose pour tout x de $[0\,;2]$, $g(x)=f^{-1}(2-x)+f^{-1}(x)$.
   a/ Montrer que g est dérivable sur$]0\,;2[$ puis calculer $g'(x)$.
   b/En déduire que pour tout x de $[0\,;2]$ $f^{-1}(2-x)=-f^{-1}(x)$.