Lycée secondaire Bach Hamba - Bizerte	Classe : $4^{ème}$ Sciences expérimentales
Prof : Mme Bayoudh	Date : 05/12/2012
Devoir de synthèse n°1 en mathématiques	Durée : 2 heures

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des affirmations suivantes , répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ est une racine sixième de $(8i)$.
2) $(cos\frac{3\pi}{5}+isin\frac{3\pi}{5})^5$ est un réel.
3) Les solutions de l'équation $Z^2+(1-i)Z+3-5i=0$ Sont $1-2i$ et $3+i$.
4) Si M et N sont les affixes des solutions de l'équation $3Z^2-6iZ+7+4i=0$, alors l'affixe du milieu de $[MN]$ est un imaginaire.

Exercice 2: (6 points)

1) a/ Vérifier que $(3+6i)^2=-27+36i$

   b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-z+7-9i=0$
2) Soit $P(z)=z^3+(i-1)z^2+(7-10i)z+9+7i$
   a/ Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
   b/ Déterminer les réels b et c tels que $P(z)=(z+i).(z^2+bz+c)$
   c/ En déduire les solutions de l'équation $P(z)=0$
3) Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $-i$, $-1-3i$ et $2+3i$
   Montrer que A , B et C sont alignés.
4) A tout point M du plan $\mathcal{P}$ d' affixe Z , on associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z'=\frac{3-iZ}{Z+1+3i}$

a/ Montrer que $Z'+i=\frac{i}{Z+1+3i}$

b/ En déduire que $M'A\times MB=1$

c/ Quel est alors l'ensemble des points M' lorsque M varie sur le cercle de centre B et de rayon 1.

Exercice 3 : (5.5 points)

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{2}}$

1) a/ Etudier la dérivabilité de f à droite en (-1).

   b/ Montrer que pour tout $x\in]-1,+\infty[$, $f'(x)=\frac{1}{4f(x)}$

   En déduire le sens de variation de f.

   b/ Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

2) Soit la suite (u_n) définie sur IN par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

   a/ Montrer que pour tout $n\in IN$, $0\leq u_n\leq 1$

   b/ Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que : $|u_{n+1}-1|\leq\frac{1}{2}|u_n-1|$

   c/ Montrer que pour tout $n\in IN$, $|u_n-1|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

   d/ En déduire la limite de (u_n).

Exercice 4 : (5.5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

1) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

   b/ Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=2+\frac{1}{4\sqrt{x}^3}$

   c/ Dresser le tableau de variation de f .

2) a/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,1[$.

   b/ Déterminer le signe de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]0,\alpha[$ et $]\alpha,+\infty[$

3) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=x^2-1-\sqrt{x}$

   a/ Calculer $g(0)$ et $g(1)$

   En déduire que la courbe représentative de g admet au moins une tangente horizontale.

   b/ Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=f(x)$

   c/ Déduire de la question 2)b/ , les variations de g sur $[0,+\infty[$.

Bon travail et bonne chance