LYCÉE DE TABARKA Prof : MERSANI IMED A.S : 2022-2023	Devoir de synthèse N°1	
	Épreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques
	Durée : 3 H	Date : 10-12-2022

Exercice 1 : (4 pts)

Soit m un nombre complexe différent de 1.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) : $z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$.

1 a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta=2i(m-1)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

2 Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, on considère les points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives $1-i$, $m-i$ et $1-im$.
Soit l'application f du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=-iz+2$.

a) Montrer que f est une isométrie.

b) Justifier que A est l'unique point fixe de f puis déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

c) Déduire que le triangle AM_1M_2 est rectangle et isocèle.

3 On suppose, dans cette question, que $m=e^{i\theta}$, où $\theta\in]-\pi,\pi]\setminus\{0\}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 quand θ décrit $]-\pi,\pi]\setminus\{0\}$ puis déduire celui des points M_2.

b) Soit I le milieu du segment $[M_1M_2]$. Déterminer l'affixe du point M_1 pour que la distance AI soit maximale.

Exercice 2 : (5 pts)

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de sens direct et de centre I. On désigne par J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$ et par R la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

1 Caractériser chacune des isométries suivantes :

a) $\varphi_1=S_{(IK)}\circ S_{(AI)}$.

b) $\varphi_2=\varphi_1\circ S_{(AC)}$.

2 (a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie B sur A et A sur D.

(b) Caractériser f.

(c) Déterminer $R \circ f(B)$ puis caractériser $R \circ f$.

(d) Caractériser $R^{-1} \circ f$.

3 Soit g l'antidéplecement qui envoie B sur A et A sur D.

(a) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.

(b) On pose $h = R \circ g$. Déterminer $h(J)$ et $h(A)$ puis caractériser h.

4 On pose $k = g^{-1} \circ f$.

(a) Caractériser k.

(b) En déduire l'ensemble Γ des points M du plan vérifiant $f(M) = g(M)$.

Exercice 3 : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x+3-\sqrt{x^2+1} & \text{si } x<0 \\ 1+\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 (a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

(b) Dresser le tableau de variation de f et tracer $\mathscr{C}$.

2 Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$.

(a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

(b) Expliciter $g^{-1}(x)$, pour tout $x \in J$.

3 (a) Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant 1$.

(b) Montrer que l'équation $f(x) = 3x$ admet dans $[0,1]$ une unique solution α.

4 Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $3U_{n+1} = f(U_n)$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [0,1]$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{3}|U_n - \alpha|$ et que $|U_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

5 Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kU_k$.

ⓐ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - \alpha\dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(U_k - \alpha)$.

ⓑ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3^n \geqslant 2n$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|S_n - \alpha\dfrac{n+1}{2n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2n}$ et que la suite (S_n) converge vers $\dfrac{\alpha}{2}$.

Exercice 4 : (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ par : $f(x) = \sqrt{\tan 2x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1 ⓐ Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement.

ⓑ Dresser le tableau de variation de f.

2 ⓐ Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[0, +\infty[$.

ⓑ Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que : $\forall x \geqslant 0$, $g'(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$.

3 Soit φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} \varphi(x) = g\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

ⓐ Montrer que φ est continue sur $[0, +\infty[$.

ⓑ Montrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x > 0$, $\varphi'(x) = -g'(x)$.

ⓒ Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{4} - g(x)$.

4 On pose pour tout $x > 0$, $h(x) = \tan(2\varphi(x))$.

ⓐ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, h est n fois dérivable sur $]0, +\infty[$
et que $h^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$, $x \in]0, +\infty[$.

ⓑ On pose $U_n = h^{(2n)}(\sqrt{2})$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 2$. Déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n$.