Lycée 07 Nov. 1987 Métlaoui Prof : DINARI + YAKOUBI Date : 06/12/2010	**DEVOIR DE SYNTHESE N°1** **MATHEMATIQUES** **DUREE 3H CLASSE 4ème Maths**

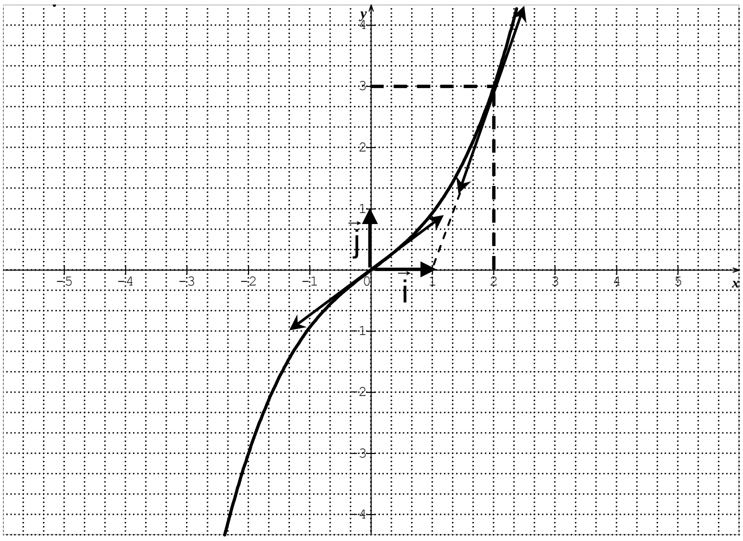
Exercice n°1 : (3points)

N.B : Dans le deux parties, aucune justification n'est demandée

I] Q.C.M : Une seule réponse est exacte :

1) Si f est la composée de trois symétries orthogonales d'axes strictement parallèles alors f est une :
   a) translation b) symétrie orthogonale c) symétrie glissante
2) Soit $f : P \to P$ et $g : P \to P$
   $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = i\,\bar{z}$ $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = -i\,\bar{z}$
   alors l'application fog est :
   a) une symétrie centrale b) translation c) l'identité du plan

II] Ci-contre sont tracées la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f impaire dérivable et strictement croissante sur IR ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et 2 dans un R.O.N.D $(O,\vec{i},\vec{j})$. On note f^{-1} la fonction réciproque de f.



Répondre par «Vrai» ou «Faux» :

a) O est un point d'inflexion de $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$.
b) $(f^{-1})'(3) = 3$.
c) f^{-1} est impaire.
d) $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation : y = –x.

Exercice n°2 : (5points)

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de diamètre [BC] et A le point de $(\mathscr{C})$ tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) a) Montre qu'il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(A) = C$ et $\varphi(B) = O$.
   b) Montrer que φ est une rotation.
   c) Soit I le centre de φ. Montrer que I est un point du cercle $(\mathscr{C})$ puis construire I.
2) Soit D l'image de C par φ et soit M le point tel que OICM est un parallélogramme.
   On note r la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et on pose $h = \varphi or$.
   a) Déterminer h(C) et caractériser h.
   b) Déterminer h(M) et en déduire que le triangle MBD est équilatéral.
3) Soit g l'antidéplacement tel que g(C) = B et g(O) = A et $f = got_{\overrightarrow{AM}}$.
   a) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.
   b) En déduire que $f = S_{(OA)}ot_{\overrightarrow{OM}}$.
   c) Caractériser $S_{(OA)}oS_{(IB)}$, en déduire que f est une symétrie orthogonale que l'on précisera.

Exercice n°3 : (5points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^3+3x-1$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique α et que $0<\alpha<1$.
   d) En déduire le signe de f(x) – 1.

2) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x^3+1)}{x^2+1} & x<1\\ 1+\sqrt{2x-1} & x\geq 1\end{cases}$

   On désigne par ($\mathscr{C}_g$) la courbe de g dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   a) Montrer que g est dérivable en 1.
   b) Ecrire l'équation de la tangente à ($\mathscr{C}_g$) au point A(1,2). Etudier la position de ($\mathscr{C}_g$) et (T). Conclure ?

3) a) Montrer que pour tout $x\in]-\infty;1[$, $\quad g'(x)=\dfrac{2x[f(x)-1]}{(x^2+1)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de g.

4) a) Etudier les branches infinies de ($\mathscr{C}_g$).
   b) Tracer ($\mathscr{C}_g$). (On prendra $\alpha_1\simeq 0,6$ et $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|$=2cm).

Exercice n°4 : (7points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;\pi[$ par : $\begin{cases}f(x)=\sqrt{x^2+4}-x-2 & \text{si} \quad x\in]-\infty;0[\\ f(x)=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) & \text{si} \quad x\in[0;\pi[\end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue sur $]-\infty;\pi[$.
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2) Soit g la restriction de f à $]-\infty;0]$.
   a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty;0]$ sur un intervalle J à préciser.
   b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

3) Soit h la restriction de f à $[0;\pi[$.
   a) Justifier que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur J.
   b) Calculer $h^{-1}(1)$.
   c) Montrer que pour tout $x\in J$; $(h^{-1})'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$.

4) Soit φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\quad \varphi(x)=h^{-1}(\sqrt{x})+h^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
   a) Montrer que φ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$.
   b) En déduire que pour tout $x\in]0;+\infty[$; $h^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\pi-h^{-1}(\sqrt{x})$.

5) On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}h^{-1}(\sqrt{k}) \qquad \text{et} \qquad V_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}h^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $h^{-1}(\sqrt{n})\leq U_n\leq h^{-1}(\sqrt{2n})$.
   En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.
   b) Exprimer V_n en fonction de U_n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$.