Lycée 07 Nov. 1987 Métlaoui **Lycée de Métlaoui** ******* **Profs : YAKOUBI & KHALDI** **Date : 08/12/2009**	**DEVOIR DE SYNTHESE N°1** **MATHEMATIQUES** **DUREE 3H CLASSE 4$^{\text{ème}}$ Maths**

<u>Exercice n°1</u> : (2.25points)

Répondre par « vrai » ou « faux » en justifiant la réponse :

1) ABC étant un triangle du plan.

   ($S_{(AB)} o S_A = S_{(AC)}$) si est seulement si (ABC est rectangle en A).

2) Si (U_n) est une suite réelle telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_{2n+1}}{U_n} = 1$ alors (U_n) est convergente.

3) Si f est une fonction deux fois dérivable sur [1,2] alors il existe $c \in]1,2[$ tel que $f''(c) = f'(2) - f'(1)$.

<u>Exercice n°2</u> : (4.25points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et les points $A' = S_D(A)$, $D' = S_C(D)$ et I le milieu de $[A'C]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R du plan qui transforme A' en A et D en B.

   b) Caractériser l'application R.

2) Soit $\varphi = t_{\overrightarrow{AD}} o R$.

   a) Déterminer φ(D) et φ(A').

   b) Caractériser alors φ.

   c) Montrer que φ(A)=D' et en déduire la nature du triangle IAD'.

3) Soit l'antidéplacement $g = S_{(BD)} o \varphi$.

   a) Montrer que gog(A')=A.

   b) En déduire que g est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{DA}$.

   c) Déterminer g(D) et en déduire l'axe de g.

<u>Exercice n°3</u> : (4points)

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) Soit l'équation $\left(E_\theta\right): z^2-2\left(1+i\sin 2\theta\right)z+2i\sin 2\theta=0$ où $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

   b) Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

2) Soit le point $M\left(1+e^{2i\theta}\right)$. Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ décrit $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3) On considère l'application : $f:(P)\to(P)$ $\qquad M(z)\mapsto M'(z')$ tel que $z'=2-\bar{z}$

   a) Montrer que f est une isométrie.

   b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f et en déduire que f est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

   c) Soit le point $N\left(1-e^{-2i\theta}\right)$. Vérifier que f(M)=N et en déduire l'ensemble des points N lorsque θ décrit $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

<u>Exercice n°4</u> : (5points)

1) On considère la fonction f définie sur [0,2] par $f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$ et on désigne par ($\mathscr{C}_f$) sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

   a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en 2. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

   b) Dresser le tableau de variations de f.

   c) Tracer ($\mathscr{C}_f$).

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur [0,2] par : $f_n(x)=x^n\sqrt{2x-x^2}$, on désigne par ($\mathscr{C}_n$) la courbe de f_n dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

   a) Etudier la position relative de ($\mathscr{C}_n$) et ($\mathscr{C}_{n+1}$).

   b) Montrer que f_n est dérivable sur]0,2[et que : $f_n'(x)=\dfrac{x^n\left[2n+1-(n+1)x\right]}{\sqrt{2x-x^2}}$.

   c) En déduire que f_n admet un maximum absolu en un réel α_n de]0,2[que l'on précisera. Vérifier que $\alpha_n\geq\frac{3}{2};\quad n\in\mathbb{N}^*$.

3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=f_n(\alpha_n)$.

   a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\quad U_n=\dfrac{(\alpha_n)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\quad\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\geq 1+\dfrac{n}{2}$.

   c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\quad U_n\geq\dfrac{n+2}{2\sqrt{2n+1}}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

Exercice n°5 : (4.5points)

Soit f une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$ vérifiant : f(0) = 0 ; $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$ et $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

On admet que la fonction f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

1) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   a) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que g'(x) = 0.

   b) En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a : $g(x)=\dfrac{\pi}{2}$ puis que $\ell=\dfrac{\pi}{2}$.

   c) Déterminer alors $f([0,+\infty[)$.

2) Montrer que l'équation f(x) = 2x – 1 admet une solution unique α dans]0,2[.

3) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=1+f\left(\dfrac{1}{2}U_n\right); \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$

   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $U_n\in[0,2]$.

   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|U_{n+1}-2\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|U_n-2\alpha|$.

   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

\- Bon Travail -