LYCEE SECONDAIRE ***DEVOIR DE SYNTHESE N°1*** ***AS- 2010/2011***

RAS JEBEL ***CL- $4^{ème}$ MATHS***

PROF- DEKHIL CHOKRI ***DUREE - 3 Heures***

EXERCICE N° 1

Soit un triangle ABC rectangle en C tel que $(\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Soient $D = R(C)$, $E = R^{-1}(B)$ et I le milieu du segment [C D]

1- a- Montrer qu'il existe un seul déplacement f tel que $f(A) = D$ et $f(C) = A$

b- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f

2 - Soit $g = f \circ R$

a- Déterminer g (A)

b- Caractériser g

3- Soit $F = g(E)$

a- Montrer que $f(B) = F$ et déduire la nature du triangle BIF

b- Montrer que les points A, C et F sont alignés

4- Soit G l'image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$

a- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h tel que $h(C) = D$ et $h(I) = G$

b- Montrer que h est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe

EXERCICE N ° 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O : \overrightarrow{U}\overrightarrow{V})$ on considère l'application f du plan

Dans lui –même qui , à tout point M d'affixe Z , associe le point M' d'affixe Z ' tel que : $Z' = Z^2 - 4Z$

1 – Soient A et B les points d'affixes $Z_A = 1 - i$ et $Z_B = 3 + i$

a- Calculer les affixes des points A ' et B ' images des points A et B par f

b- On suppose que deux points ont la même image par f

Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale

2 – Soit I le point d'affixe (- 3)

a- Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $Z^2 - 3Z + 3 = 0$

b- Résoudre l'équation $Z^2 - 3Z + 3 = 0$

3 - a- Exprimer (Z' + 4) en fonction de (Z – 2)

En déduire une relation entre $|Z' + 4|$ et $|Z - 2|$ puis entre arg (Z '+ 4) et arg (Z – 2)

b- On considère les points J et K d'affixes respectives $Z_J = 2$ et $Z_K = -4$

Démontrer que tous les points M du cercle (C) du centre J et de rayon 2 ont leurs images M' sur

Un même cercle que l'on déterminera

c- Soit $Z_E = -4 - 3i$

Donner la forme trigonométrique de $Z_E + 4$ puis démontrer qu'ils existe deux points dont l'image par f

Est le point E . Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points .

PROBLEME

Soit f la fonction numérique définie sur] – 2 ; - ½] par : $f(x) = \sqrt{1 + cotan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

1 – a – Montrer que f est dérivable sur] – 2 ; - ½[et calculer f ' (x)

b - Etudier la dérivabilité de f à gauche en (- ½) ; interpréter ce résultat

c – Montrer que f est une bijection de] – 2 ; - ½] sur un intervalle J que l'on précisera

d – Construire dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f et f^{-1}

2 – a- Monter que f^{-1} est dérivable sur] 0 ; +∞ [et que pour tout x de] 0 ; +∞ [

$$\text{On a : } \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{-4X}{\pi\left(1+\left(x^2-1\right)^2\right)}$$

b- Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0

3 – Soit (V_n) la suite définie sur N^* par :

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{k=2n-1} f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

a- Montrer que pour tout n de N^* on a : $f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \le V_n \le f^{-1}\left(\frac{1}{3n-1}\right)$

b- En déduire que (V_n) est convergente

4 – Soit h la fonction définie sur [0 ; +∞ [par : $h(X) = f^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{X}}\right)$ si X > 0 et h (0) = - 2

a- Montrer que h est continue sur [0 ; +∞ [

b- Montrer que h est dérivable sur] 0 ; +∞ [et que pour tout x de] 0 ; +∞ [on a : h ' (X)=$\frac{2}{\pi(1+X^2)}$

c- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout réel a strictement positif

il existe au moins un réel c appartenant à] 0 ; a [tel que : $\frac{h(a)+2}{a} = \frac{2}{\pi(1+c^2)}$

e- En déduire que h est dérivable à droite en 0

5- Montrer que l'équation : h (X) = 2X – 3 admet une solution unique α dans] 0 ; +∞ [

6- On considère la suite définie par : U_0 ε] 1 , 2 [et pour tout n de n ; U_{n+1} = 3 + h (½U_n)

a- Montrer que pour tout x de] 0 ; +∞ [,on a : h (X) appartient à] – 2 ; - 1[

b- En déduire que α appartient à] ½ ; 1[et que U_n appartient à] 1 , 2 [pour tout n de N

c- Montrer que pour tout X de] 0 , +∞ [on a : $|h(X)| \leq \frac{2}{3}$

d- Montrer que pour tout n de N on a : $|U_{n+1} - 2a| \leq \frac{1}{3}|U_n - 2a|$

e- Déduire que la suite (U_n) est convergente

EXERCICE N° 3

Cocher la bonne résponse

1 – Soient trois droites d'un plan D_1 , D_2 et D_3 concourantes en I

L'isométrie f = S_{D1} o S_{D2} o S_{D3} est une

a- Symétrie axiale b – Symétrie glissante c – Symétrie centrale

2 – Soit D une droite d'un plan et $\vec{u}$ un vecteur normal à D

L'isométrie g = $t_{\vec{u}}$ o S_D est une

a- Symétrie axiale b – Symétrie glissante c – Symétrie centrale

3 – Soient A et B deux points distincts d'un plan , S la symétrie axiale d'axe (AB) et R la rotation de centre

A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. L'isométrie h = R o S est une

a- Symétrie axiale b – Symétrie glissante c – Symétrie centrale

---

BAREME 5 – 4 – 8 – 3