Lycée : Mohamed Ali **Profs : Fourati Ali** **Derbel Louati Nada**	**Devoir de synthèseN°3** **Épreuve : Mathématiques**	**Date : 30/05/2024** **Classe : $3^{ième}$ Tech** **Durée : 3 h**

Exercice 1 : (4 pts)

Une urne contient 7 boules: $\begin{cases} 3 \text{ blanches numérotées: } -1\,;1\,;\,2 \\ 4 \text{ rouges numérotées: } -1;\ \ 1\,;1 : 2 \end{cases}$

1°/ On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

a- Calculer le cardinal de l'univers Ω.

b-Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Avoir 3boules de même couleur ».

B : « Le produit des nombres des trois boules tirées est négatif ».

$C = A \cup B$.

D : «Avoir exactement une boule blanche numérotée -1».

2°/ On tire successivement et sans remise 3boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E : «Avoir 3boules dont le produit est égale 1 ».

F : «Avoir les 2 premiers boules rouges et la troisième numérotée -1».

G : « Avoir 3boules de numéros différents »

3°/ On enlève deux boules blanches de l'urne puis on tire successivement et avec remise 5 boules de l'urne. On considère l'évènement A_n« Obtenir n fois une boule rouge ».

a- Montrer que $p(A_5) = \left(\frac{4}{5}\right)^5$

b- Montrer que $p(A_4) = \left(\frac{4}{5}\right)^4$

c- Calculer $p(A_3)$

Exercice 2 : (5 pts)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3+u_n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

1°/ a- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :$u_n > 0$.

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante

c- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < u_n \leq 1$

2°/ Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2+u_n}{u_n}$.

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 3

b- Exprimer v_n en fonction de n et déduire que la suite (v_n) est divergente.

3°/a- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \frac{2}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$

b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4°/ Soit $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2+u_k}$; $n \in \mathbb{N}$

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,on a : $1 - \frac{2}{2+u_n} = \frac{1}{v_n}$

b- En déduire que $1 - S_n = \frac{1}{6n}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

c- Calculer, alors, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Exercice 3 : (4 pts)

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Prix de vente (en dinars) X	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs éventuels Y	180	160	150	130	100	90	80	70

1°/Représenter le nuage des points dans un repère orthogonal (unité $1cm$sur l'axe des abscisses et $1cm$ pour 10 unités sur l'axes des ordonnées).

2°/ a- Calculer la moyenne $\overline{X}$ de la variable X

b- Calculer la moyenne $\overline{Y}$ de la variable Y

c- Placer le point moyen G de ce nuage sur le graphique.

3°/ a- Calculer les coordonnées du point moyen G_1 du premier sous nuage et les coordonnées du point moyen G_2 du deuxième sous nuage.

Placer G_1 et G_2 dans le même repère et tracer la droite de Mayer (G_1G_2)

b- Estimer graphiquement le prix maximum pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.(Laisser un tracé en pointillés sur le graphique)

4°/a- Vérifier qu'une équation de la droite de Mayer (G_1G_2) est $y = -14x + 302$

b- En déduire :

- Le nombre d'acheteurs que l'on peut prévoir si le prix de vente est fixé à$13DT$
- Le prix de vente pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur ou égale à 250.

Exercice 4 : (5 pts)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$.On considère les point $A(1;2;0)$; $B(0;1;2)$;$C(2;0;1)$ et $D(3;3;3)$.

1°/a-Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b- En déduire que les point A; B et C déterminent un plan P.

c- Calculer l'aire du triangle ABC.

2°/ a-Calculer le produit mixte $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}$

b- Justifier que $D \notin P$ et calculer le volume de tétraèdre $ABCD$.

c- Calculer ,alors, la distance du point D au plan P.

3°/ Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

a- Vérifier que $G(1;1;1)$ puis calculer la distance DG.

b- En déduire que G est le projeté orthogonale du point D sur le plan P.

4°/Soit Ql'ensemble des points M de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AG}\right).\overrightarrow{AM} = 0$.

a- Prouver que Q est le plan (ADG).

b- Montrer que $(BC) \perp Q$.

c- En déduire que Q est le plan médiateur de segment $[BC]$