

Exercice 1 : (5,5pts)

Une urne contient 9 boules: $\begin{cases} 4 \text{ blanches numérotées: } 1; 1; 1; 2 \\ 5 \text{ noires numérotées: } 1; 1; 1; 2; 2 \end{cases}$

1°/ On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

a- Calculer le cardinal de l'univers Ω .

b- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Avoir 3 boules de même couleur ».

B : « Avoir 3 boules de même numéro ».

$C = A \cup B$.

2°/ On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

D : « Avoir au premier tirage une boule blanche numéroté 1 ».

E : « Avoir au premier tirage une boule numéroté 1 ».

F : « Avoir exactement une seule boule numéroté 1 ».

G : « Avoir au moins une boule numéroté 1 »

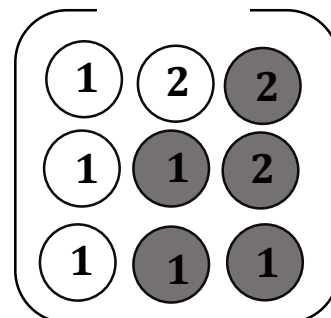
3°/ On tire successivement et avec remise 4 boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

H : « Avoir quatre boules de même numéro ».

I : « Avoir un produit des numéros marqués paire ».

J : « Avoir une boule blanche au premier tirage et une boule numéroté 1 la première fois au troisième tirage ».

**Exercice 2 : (4 pts)**

Une entreprise souhaite estimer le nombre d'abonnés à une nouvelle application mobile en fonction du tarif mensuel. Elle réalise un sondage auprès d'un panel de clients. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Prix mensuel (en dinars) X	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'abonnés Y	295	275	245	205	190	145	125	80

1°/ Représenter le nuage des points dans un repère orthogonal (unité 1cm pour 1 dinar en abscisse, 1cm pour 20 abonnés en ordonnée).

2°/ a- Calculer la moyenne $\bar{X}$ de la variable X

b- Calculer la moyenne $\bar{Y}$ de la variable Y

c- Placer le point moyen G de ce nuage sur le graphique.

3°/ a- Calculer les coordonnées du point moyen G_1 de la première moitié du nuage

b- calculer celle du point G_2 de la deuxième moitié.

c- Tracer la droite de Mayer (G_1G_2)

d- Estimer graphiquement le tarif mensuel pour qu'il y ait au moins 180 abonnés.
(Laisser un tracé en pointillés sur le graphique)

4°/ a- Vérifier qu'une équation possible de la droite de Mayer (G_1G_2) est $y = -30x + 450$

b- En déduire :

- Le nombre d'abonnés prévus si le prix est fixé à 4 dinars.
- Le prix à ne pas dépasser pour espérer avoir plus de 200 abonnés.

Exercice 3 : (5 pts)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{5}{3}$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

1°/ a- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 < u_n < 2$

b- Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$, on a : tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = (u_n - 1)(2 - u_n)$

c- En déduire la monotonie de la suite (u_n)

d- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{5}{3} \leq u_n < 2$

2°/a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_{n+1} - 2| = \frac{3}{u_{n+1}+2} |u_n - 2|$

b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_{n+1} - 2| \leq \left(\frac{9}{11}\right) |u_n - 2|$

c- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{9}{11}\right)^n$

d- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3°/ Soit $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (u_k)^2$; $n \in \mathbb{N}$

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=1}^n (u_k)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} [3(u_k - 2) + 4]$

b- En déduire que $S_n = \frac{3}{n^2} (\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - 2)) + \frac{4}{n}$

c- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n| \leq \frac{33}{2n^2} \left(1 - \left(\frac{9}{11}\right)^n\right) + \frac{4}{n}$

d- Déterminer, alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Exercice 3 : (5,5 pts)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points ; $S(1; 1; 1)$; $A(4; 1; 1)$; $B(1; 4; 1)$ et $C(1; 1; 4)$.

1°/a- Vérifier que les vecteurs $\vec{SA}$, $\vec{SB}$ et $\vec{SC}$ sont deux à deux orthogonaux

a- Déterminer la nature du triangle SAB et vérifier que son aire $\mathcal{A} = \frac{9}{2}$

c- Soit $\mathcal{V}$ le volume de tétraèdre $SABC$. Montrer que $\mathcal{V} = \frac{9}{2}$ (on donne le volume d'un tétraèdre est égale $\frac{B \times h}{3}$ tel que B l'aire de la base et h la hauteur associée)

2°/ Soit la droite Δ passant par le point S de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a- Vérifier que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC)

b- Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

3°/ On donne par la suite (ABC) : $x + y + z - 6 = 0$

a- Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

b- Calculer les coordonnées du point H tel que $\Delta \cap (ABC) = \{H\}$

4°/a- Justifier que le point H est le projeté du point S sur le plan (ABC)

b- Calculer la distance de S au plan (ABC)

c- En déduire l'aire du triangle ABC

5°/ Soit le plan Q : $x + y - 5z = 0$.

a- Montrer que les plans (ABC) et Q sont sécants

b- Vérifier que $Q = (OAB)$.

c- En déduire l'intersection des deux plans (ABC) et Q .