LYCEE ELHICHRIA ✧✧✧✧ **DEVOIR DE SYNTHÈSE N°3** **MATHÈMATIQUES** ✧✧✧✧	**SECTION : 3ème Sc** **PROF : Mr Aloui Fethi**
Durée : 3H	**Date : 23/05/2025**

NB : <u>Le sujet comporte 4 pages.</u>
<u>La page 4 est une annexe à rendre avec la copie.</u>

<u>Exercice n°1</u> : (5pts)

Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n+3}{U_n+3} \end{cases}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

1) a/ Vérifier que pour tout n de IN on a : $U_{n+1} = 5 - \frac{12}{U_n+3}$

b/ Montrer par récurrence que pour tout n de IN : $0 \leq U_n \leq 3$

2) a/ Montrer que pour tout n de IN : $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n+1)(3-U_n)}{U_n+3}$

b/ Montrer que la suite U est croissante .

d/ Déduire qu'elle est convergente

3) Soit V la suite définie sur IN par : $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$

a/ Montrer que la suite V est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b/ Exprimer V_n en fonction de n puis déduire que $U_n = \frac{3 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 + (\frac{1}{3})^{n+1}}$

c/ Calculer les limites des suites U et V .

4) Soit $S_n = v_0 + v_1 + ..+ v_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de n, et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

5) a/ Montrer que pour tout n de IN on a : $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{2}{5}|U_n - 3|$

b/ Déduire que pour tout n de IN on a : $0 \leq |U_n - 3| \leq 2\,(\frac{2}{5})^n$

Exercice n^{0}2 : (5.75 pts)

une urne contient 9 boules indiscernable au toucher dont cinq blanches numérotés (1,2,3,3,3) et quatre rouges numérotés (1,2,3,3).

I. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne .On considère les événements suivants :

A : « Obtenir deux boules de même couleur » .

B : « L'une exactement des deux boules tirées porte le numéro 3 »

1)

a/ Calculer p(A) et p(B)

b/ Montrer que p($A \cap B$) = $\frac{5}{18}$ puis déduire que p($A \cup B$)

c/ Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

2) On désigne par X le nombre de boules blanches tirées et qui portent le numéro 3

a/ Donner les valeurs possibles de X.

b/ Calculer la probabilité de chaque valeur de X.

c/ Vérifier que la somme de toutes ces probabilités est égale à 1.

II. On tire successivement et avec remise et au hasard 3 boules de l'urne ; Calculer la probabilité des événements suivantes :

C « Obtenir 3 boules de même couleur » .

D « Obtenir une boule portant le numéro 1pour la première fois au deuxième tirage »

Exercice n^{0}3 : (2,75pts)

Lors d'un examen oral, un candidat choisit successivement 3. La probabilité qu'il choisit une question qu'il a révisée est $\frac{3}{4}$. On suppose que les choix sont indépendants les uns des autres.

1) Calculer la probabilité que le candidat choisit 3 questions révisées

2) Calculer la probabilité que le candidat choisit exactement 2 questions révisées.

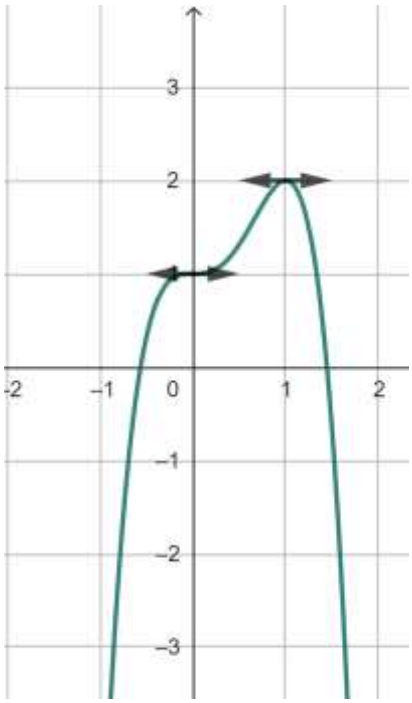
3) Calculer la probabilité que le candidat choisit au moins une question révisée.

Exercice n^{0}4 : (7 pts)

I. Le plan est muni d'un repère orthonormé (o, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) . Le graphique ci-dessous représente la courbe d'une fonction g définie sur IR par $g(x) = -3x^4 + 4x^3 + 1$

- La courbe (C_g) admet deux branches paraboliques de direction celle de (o, $\vec{\jmath}$) , l'une au voisinage $-\infty$ et l'autre au voisinage de $+\infty$
- La courbe (C_g) admet deux tangentes horizontales

Par lecture graphique



1/ a/ Déterminer : g(0) ; g '(0) et g '(1).

b/ Donner l'équation de la tangente à (C_g) au point d'abscisse 0 .

c/ Déterminer : $\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$. et $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$.

d/ Recopier et compléter le tableau de variations de g

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		.....	0	.....	0	.....	
g							

2/ a/ Montrer que l'équation g(x)= 0 admet exactement sur $\mathbb{R}$ deux solutions α et β tels que $-0{,}6 < \alpha < -0{,}5$ et $1{,}4 < \beta < 1{,}5$

b/ Déterminer le signe de g(x) sur $\mathbb{R}$

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x-1}{x^4+1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$)

1/ a/ Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, Interpréter graphiquement les résultats

b/ Déterminer la position relative de (C_f) par rapport à l'axe des abscisses

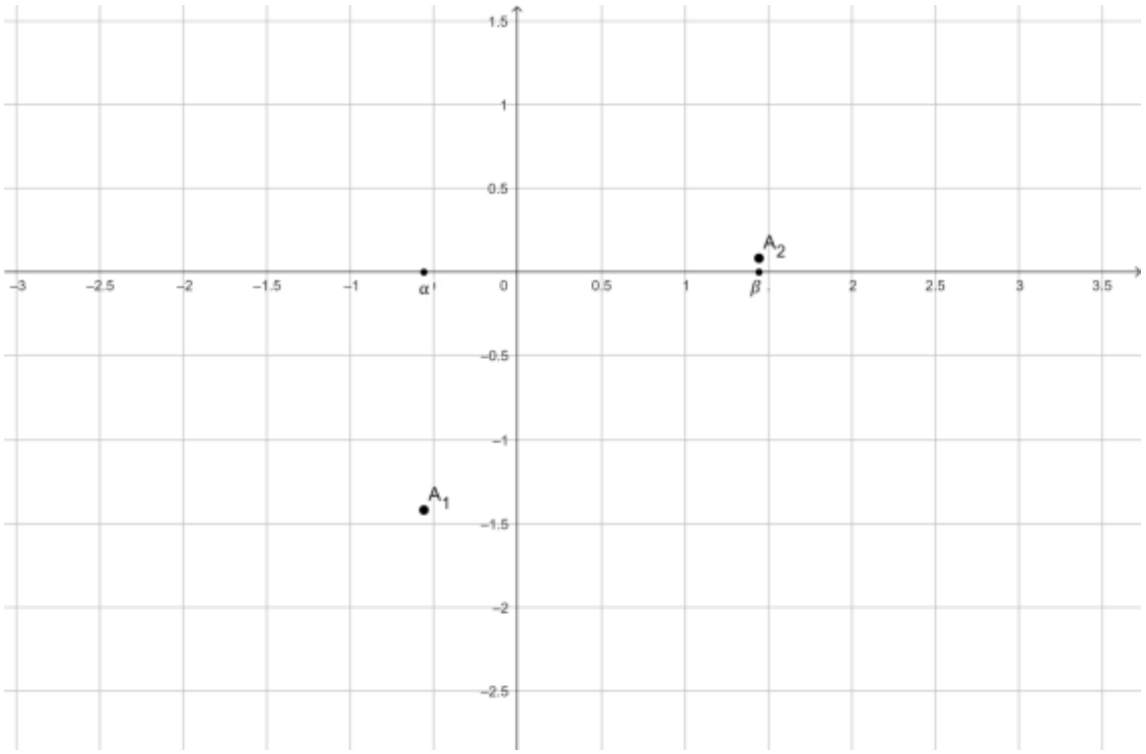
2/ a/ Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^4+1)^2}$

b/ Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

3/ Dans **la figure de l'annexe jointe**, on a représenté les points $A_1(\alpha, f(\alpha))$ et $A_2(\beta, f(\beta))$ dans le repère orthonormé (o, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$)

a/ Calculer f(−1) ; f(0) et f(1).

b/ Tracer (C_f) dans la figure de l'annexe

Annexe

Nom et prénom: . . . . . Classe : $4^{ème}$ *SC*