Lycée Chebbi

Tataouine

Devoir de synthèse N°3

Mathématiques

A.S : 2023/2024 Durée : 3h $3^{\text{éme}}$ sc. exp

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4 .

Exercice n°1 : (QCM) (03 points)

Pour chacune des questions suivantes,

une seule réponse proposée est exacte.

Indiquer la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit f la fonction définie sur $[0,\pi[$ par : $f(x)=\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$

la fonction dérivée de f est :

a) $f'(x)=\frac{1}{1+\cos(x)}$ b) $f'(x)=\frac{1}{(1+\cos(x))^2}$ c) $f'(x)=\frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}$

2) Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_n=\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=1$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=-1$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on donne : $S_n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$

a) $S_n=n+1$ b) $S_n=2^n+1$ c) $S_n=2^n$

4) A et B deux événements tel que $P(A)=\frac{1}{7}$, $P(B)=\frac{3}{5}$ et $P(A\cap B)=\frac{3}{35}$

$P(A\cup B)$ est égale à :

a) $\frac{23}{35}$ b) $\frac{29}{35}$ c) $\frac{26}{35}$

Exercice n°2 : (04 points)

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{20}{3} ; (n \in IN) \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) Justifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

2) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN, U_n < 10$

b) Montrer que (U_n) est croissante

3) Soit (V_n) la suite définie sur IN par $V_n = U_n - 10, (n \in IN)$

a) Calculer V_0

b) Montrer que pour tout $n \in IN, V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$

puis déduire la nature de la suite (V_n)

c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

4) Pour tout n $\in IN$ on pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

et $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

a) Montrer que $S_n = -12 \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

b) Montrer que $S'_n = 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 10n - 2$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n$

Exercice 3 : (04pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points

A(-1, -1, 3) , B(0, -3, 1) et C (-3, 0, 1).

1. a) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.

2. a) Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Calculer $\vec{n}.\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{n}.\overrightarrow{AC}$ puis déduire que $\vec{n}$ est un vecteur normal à P

b) Montrer alors qu'une équation cartésienne de P est: $2x + 2y - z + 7 = 0$

2. Soit le point $I(3, -1, 2)$

a) Vérifier que le point I n'appartient pas au plan P

b) Soit le point H projeté orthogonal du point I sur le plan P.

Déterminer les coordonnées du point H .

3. Soit Q le plan d'équation : $x - 2y - 2z + 11 = 0$

a) Montrer que Q est perpendiculaire à P.

b) Soit Δ la droite intersection de P et Q .

Vérifier qu'une représentation paramétrique de Δ est: $\begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 5 - 2\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice N°4 : (05 points)

I/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 3x - 2$

1) Calculer$g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$

b) Vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$

3) Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x dans $\mathbb{R}$

II/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$

On désigne $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f

dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(x^2+1)^2}$

2) Montrer que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

3) Vérifier que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \alpha$

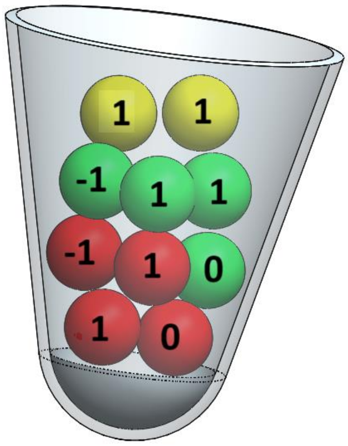
puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

4) a) Montrer que la droite $\Delta: y = x$ est une asymptote (oblique) à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$

b) Etudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à Δ

5) Tracer Δ et $(\mathcal{C}_f)$

Exercice n°5 : (04 points)



Une urne contient :

- 4 boules rouges numérotées : -1, 0, 1, 1
- 4 boules vertes numérotées : -1, 0, 1, 1
- 2 boules jaunes numérotées : 1, 1

On tire simultanément et au hasard 2 boules d'urne.

1) On désigne par Ω l'univers des possibles

   Calculer card (Ω)

2) Calculer la probabilité des chacun des événements suivants :

A : « Obtenir deux boules de couleurs différentes. »

B : « Obtenir deux boules de mêmes numéros. »

C : « La somme des numéros inscrits sur les deux boules tirées est égale à 0 »

D : « Obtenir au moins une boule portant le numéro 1. »

3) On désigne par X : la somme des numéros inscrits sur les deux boules tirées

   a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b) Calculer la probabilité de chaque valeur de X

Bon travail

Formule de binôme de NEWTON

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; a^{n-k} \, . \, b^k$$