

Exercice 1(5pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est une hyperbole $\mathcal{H}$. On considère I le centre de symétrie de l'hyperbole $\mathcal{H}$.

1°/ On donne $O \in \mathcal{H}$ et le point $A(2; 4) \in \mathcal{H}$ tel que O et A sont symétriques par rapport à I .

a- Montrer que $I(1; 2)$.

b- Déterminer les équations des deux asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{H}$.

c- On donne dans la feuille annexe une partie de $\mathcal{H}$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$. Placer le point I tracer les deux asymptotes et compléter la courbe $\mathcal{H}$.

2°/a- Justifier que $b = 0$; $\frac{a}{c} = 2$ et que $\frac{d}{c} = -1$

b- Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

3°/On donne dans la même figure une deuxième courbe $\mathcal{P}$ d'une fonction g

a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $\mathcal{P}$.

b- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 4x$.

4°/Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

a- $0 \leq g(x) \leq f(x)$.

b- $2x \left(\frac{1}{x-1} - 2 \right) + x^2 \geq 0$

Exercice 2(5pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x+3}{x+3}$.

1°/a- Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b- Montrer pour tout $x \in D_f$; on a : $f(x) = -1 + \frac{6}{x+3}$.

c- En déduire le sens de variation de la fonction sur l'intervalle $] -3; +\infty[$.

2°/On considère $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $\mathcal{C}_f$.

b- Déterminer les coordonnées des points d'intersections de $\mathcal{C}_f$ et les deux axes du repère.

c- Tracer dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}_f$ et ses éléments caractéristiques.

3°/ Soit la fonction h définie par $h(x) = 1 - \frac{2|x|}{3+|x|}$ et $\mathcal{C}_h$ sa courbe dans le même repère

a- Déterminer l'ensemble de définition de h et vérifier que la fonction h est paire.

b- Vérifier que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $h(x) = f(x)$.

c- En déduire la courbe $\mathcal{C}_h$ à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$.

d- Déterminer à partir du graphique les variations de la fonction h .

Exercice 3 (4,5pts)

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et l'ensemble $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 2(4x + 3y) = 0$

1°/ Montrer que $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $I(4; 3)$ et de rayon $R = 5$.

2°/ Soit le point $A(1; -1)$.

a- Vérifier que $A \in (\mathcal{C})$

b- Donner une équation de la droite D la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A .

3°/ Soit la droite $\Delta: x - y + 3 = 0$.

a- Calculer la distance du point I à la droite Δ .

b- Dédire que le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite Δ sont sécants.

c- Calculer les coordonnées des points d'intersections de $(\mathcal{C})$ et Δ .

Exercice 4 (5,5pts)

Soit $SABCD$ une pyramide régulière (c'est-à-dire $SA = SB = SC = SD = AB$) dont la base $ABCD$ est un carré de centre O

1°/ Soit le point I le milieu de l'arête $[AB]$.

a- Quelle est la nature du triangle SAB . En déduire que $(SI) \perp (AB)$.

b- Montrer que les droites (OI) et (AB) sont perpendiculaires.

c- En déduire que (AB) perpendiculaire au plan (SOI) .

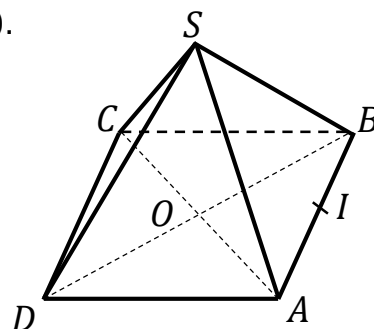
d- Justifier que (SOI) est le plan médiateur de $[AB]$.

2°/ Soit P le plan médiateur de $[SA]$.

a- Montrer que $B \in P$ et que $D \in P$.

b- En déduire que $O \in P$.

c- Montrer que $OS = OA = OB = OC = OD$.



3°/ Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle SAC .

a- Montrer que la droite (BD) est l'axe du cercle $(\mathcal{C})$.

b- Montrer que la droite (BD) perce le plan (SAC) en O .

c- En déduire que O est le centre du cercle $(\mathcal{C})$.

d- Montrer que le triangle SAC est rectangle isocèle en S .

Annexe

Nom et prénom : 2^{ème} Sc.....

Figure de l'exercice 1

