

Exercice n°1 : (6 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1 ; 1 ; 0)$, $B(0 ; 1 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 1)$ et $D(0 ; 2 ; 1)$.

I- 1) a) Vérifier que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$.

b) Dédurre que les points A , B et C définissent un plan $\mathcal{P}$ et que le point B est le projeté orthogonal de D sur $\mathcal{P}$.

c) Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $y + z - 1 = 0$.

2) Soit $\mathcal{V}$ le volume du tétraèdre $ABCD$. Montrer que $\mathcal{V} = \frac{1}{6} BD^2$

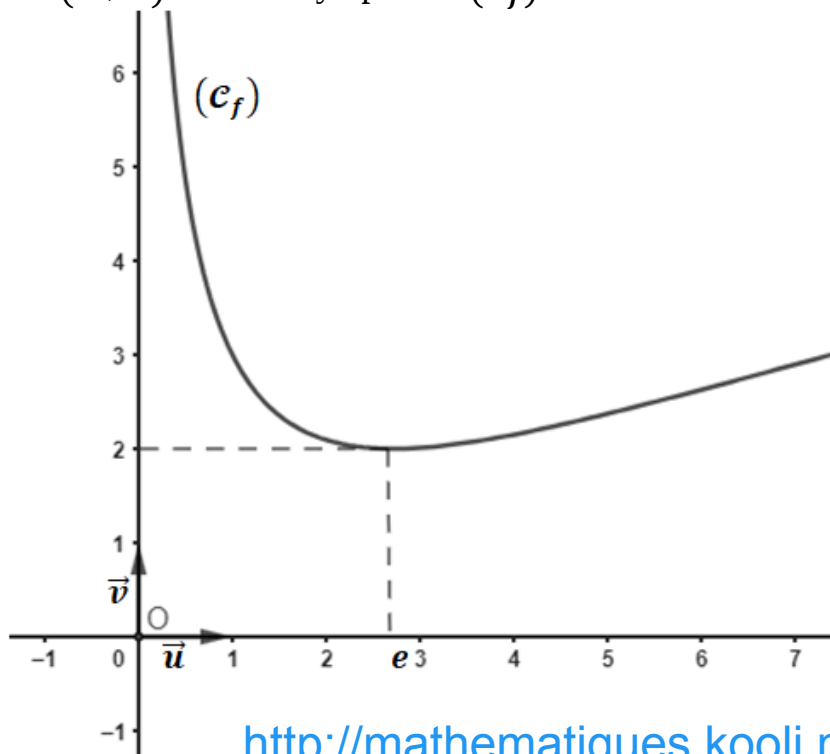
3) On considère la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \alpha \\ z = -\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Montrer que Δ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ en A .

b) Soit M un point de Δ . Déterminer les valeurs de α pour que les tétraèdres $ABCD$ et $ABCM$ ont le même volume.

II- Ci – dessous, dans un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v})$ on a représenté la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln^2(x) - p \ln(x) + m$ dont sa représentation graphique (C_f) admet une branche parabolique de direction $(\mathbf{O}, \vec{u})$ au voisinage de $+\infty$. L'axe $(\mathbf{O}, \vec{v})$ est une asymptote à (C_f) . Le réel 2 est le minimum de f atteint en e .



- 1) a) Montrer que (C_f) admet au point d'abscisse e une tangente horizontale.
b) Par une lecture graphique montrer que $p = 2$ et $m = 3$.
- 2) Soit $N\left(1 + \ln\left(\frac{1}{t}\right), 1 + \ln^2(t); 3 - 2\ln(t)\right)$ ou t est un réel strictement positif.
a) Montrer que le volume du tétraèdre $ABCN$ est égale à $V(t) = \frac{1}{6} f(t)$
b) En déduire que $V(t)$ est minimale si $N = D$.

Exercice N°2 : (8 points)

I. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = x \ln x - x + 1 & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
b) Montrer que g est continue en 0 .
c) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) Dresser le tableau variation de g .
- 3) Tracer (C_g)
- 4) Soit $\alpha \in]0; 1[$.
a) En intégrant par parties, montrer que $\int_{\alpha}^1 x \ln x \, dx = \frac{1}{4}(\alpha^2 - 1 - 2\alpha^2 \ln(\alpha))$
b) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_g) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$
c) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$

II. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Montrer que f est continue en 1 .
b) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[\setminus \{1\}$ on a $f'(x) = \frac{-g(x)}{x(x-1)^2}$.
c) On admet que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1 .

- 2) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) Tracer (T) et (C_f) .

III. Pour tout $x \in]0; +\infty[$ on pose $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

- 1) Montrer que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $F'(x)$
- 2) a) Montrer que pour tout $t > 1$ on a : $f(t) \geq \frac{1}{t}$
b) En déduire que pour tout $x > 1$, on a : $F(x) \geq \ln x$. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
- 3) a) Montrer que pour tout $t \in]0; \frac{1}{2}[$ on a $0 \leq f(t) \leq -2 \ln t$.
b) En déduire que pour tout $x \in]0; \frac{1}{2}[$ on a : $0 \leq \int_x^{\frac{1}{2}} f(t) dt \leq 1 + \ln 2$

4) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par $U_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt$

- Montrer que la suite (U_n) est croissante.
- En déduire que (U_n) est convergente.

Exercice N°3 : (6 points)

Sur un dossier de ton ordinateur, tu as enregistré **10 films** dont **7** sont d'action

(5 en couleurs et 2 en noir et blanc) et **3** dramatiques **(2 couleurs et 1 en noir et blanc)**

1) Tu as décidé de voir deux films successifs :

- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : « Voir deux films d'actions »

F : « Voir un seul film dramatique »

G : « seul le deuxième film est d'action et en couleur »

- Sachant que tu as vu deux films d'action, quelle est la probabilité de voir un seul en noir et blanc.

- Calculer la probabilité de voir deux films d'action ou deux films en couleurs.

2) Un virus a infecté le dossier de tes films :

- 60 %** des films d'action et **50 %** des films dramatiques sont infectés.
- Après avoir analysé le dossier, un antivirus arrive à réparer **80 %** de tes films d'action et **90 %** des des films dramatiques.

On choisit un film au hasard .

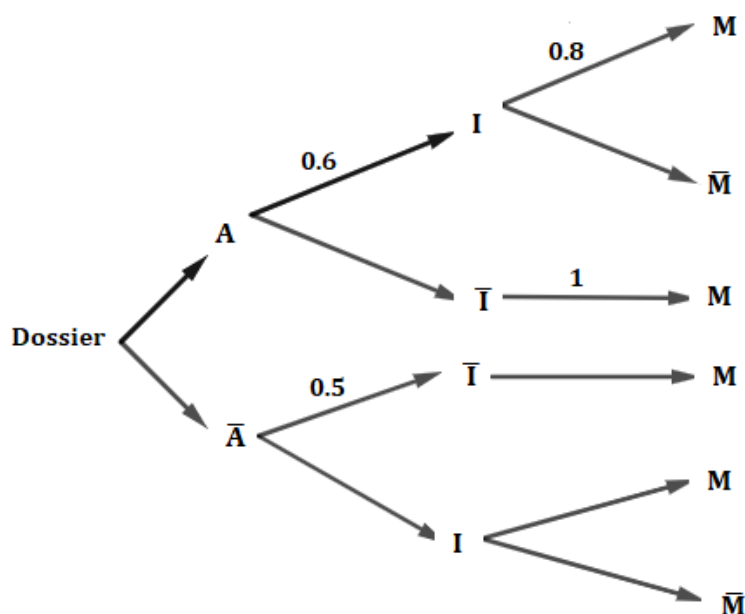
On désigne par **A**, **I** et **R** les événements suivants :

A : « Choisir un film d'Action »

I : « Choisir un film Infecté »

M : « Choisir un film en Marche »

- Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci – dessous.



- Montrer que **57 %** des films sont infectés.
- Calculer la probabilité de choisir un film en marche.
- Sachant que tu as choisit un film en marche, quelle est probabilité pour soit d'action.