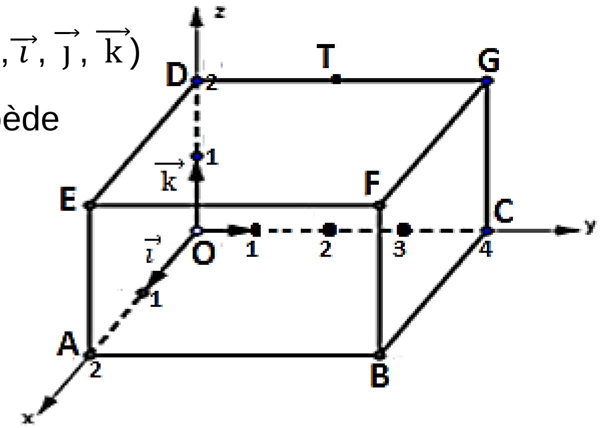
Lycée I.K.Jemmel	Devoir de Synthèse n°2	Garrab Wissem
4sc.exp - A.S : 23/24	Mathématiques – Durée : $\left(\int_1^{e^3} \frac{dx}{x}\right)$ heures	Afli Ahmed ************

Exercice 1 : (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

Dans la figure ci-contre OABCDEFG est un parallélépipède rectangle et T est le milieu du segment [DG].



1) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (TAF) est : $x - y + 2z - 2 = 0$

2) Soit S la sphère de centre I (0,1,0) et de rayon 2.

Montrer que le plan (TAF) coupe S suivant un cercle que l'on précisera.

3) Soit M(a,4,2) avec a ∈ IR.

a) Vérifier que le point M varie sur la droite (FG).

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ADM) est : $4x - ay + 4z - 8 = 0$.

c) Déterminer, en fonction de a, la distance du point I au plan (ADM).

d) Déterminer la position du point M pour que le plan (ADM) coupe S suivant un cercle de rayon $\sqrt{3}$.

Exercice 2 : (4 points)

Soit g et G les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ et $G(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$

1) Montrer que G est une primitive de g sur $[0,+\infty[$

2) Soit I l'intégrale définie par $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$. Montrer que $I = \ln\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$

3) Soit les intégrales : $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

a) Montrer que $J + 2I = K$

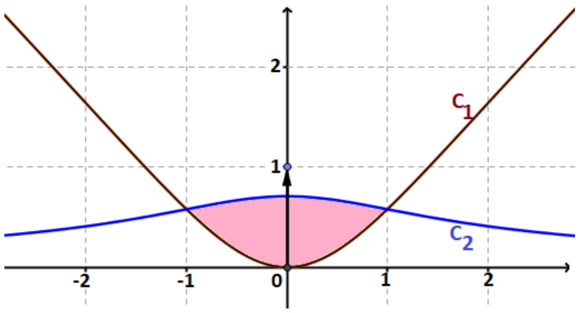
b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, Montrer que $K = \sqrt{3} - J$

c) En déduire les valeurs de J et K.

4) On donne ci-contre les courbes C_1 et C_2 respectives des fonctions définies sur IR par :

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} \quad \text{et } h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

Calculer l'aire de la partie hachurée.



Exercice 3 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur [0,+∞[par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Etudier la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.

2) Montrer que pour tout x > 0, $f'(x) = \frac{1}{x+1}\left(1 + \frac{\ln x}{x+1}\right)$.

3) Dans ***l'annexe ci-jointe page 3***, C_g est la courbe de la fonction g définie sur]0,+∞[

par $g(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ et D la droite d'équation y = -1.

On note $\boldsymbol{\alpha}$ l'abscisse du point d'intersection de C_g et D.

a) Par lecture graphique, déterminer suivant les valeurs de x, le signe de 1 + g(x).

b) Montrer que $f(\boldsymbol{\alpha}) = -\boldsymbol{\alpha}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Placer dans l'annexe, le point A de C_f d'abscisse α.

b) Etudier la position relative de C_f et C_g.

c) Tracer C_f dans l'annexe.

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\alpha,+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[\alpha,+\infty[$ sur $[-\alpha,+\infty[$

On note h^{-1} sa fonction réciproque

b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} à droite en $-\alpha$.

c) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(h^{-1})'(0)$

6) a) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) \leq \ln x$.

b) Montrer que l'aire de la partie du plan limitée par C_f,l'axe des abscisses et les droites

d'équations x = 1 et x = e est inferieure ou égale à une unité d'aire.

Exercice 4 : (4 points)

On teste un médicament parmi un ensemble d'individu ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant un placebo. (C'est une substance neutre que l'on substitue à un médicament).

On étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8.

On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant pris le placebo.

On considère les événements suivants :

M : « avoir pris le médicament ». et B : « avoir une baisse du taux de glycémie ».

1) A l'aide des informations indiquées dans l'énoncé ;

a) Donner les valeurs de p(M), p (B / M) et p ($\overline{B}$ / $\overline{M}$).

b) Dessiner l'arbre de probabilité correspondant à cette situation.

c) Montrer que p(B) = 0,52.

2) On soumet au test un individu pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament si l'on ne constate pas de baisse de son taux de glycémie ?

3) On contrôle trois individus au hasard l'un après l'autre et on note H l'événement : « avoir au moins un individu dont le taux de glycémie n'a pas baissé ».

Calculer p(H). (Le résultat sera donné arrondi au millième).

Annexe

Exercice 4 :