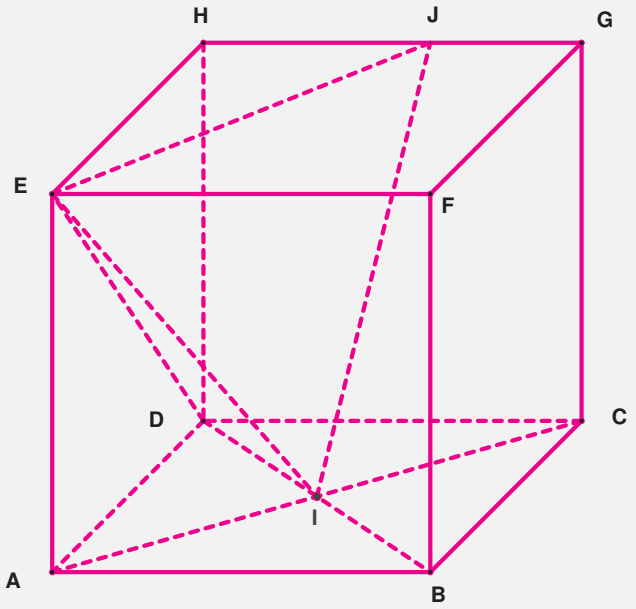
◇◇◇ Prof : SELMI Rochdi ◇◇◇◇Lycée de Tabarka◇◇◇			A.S. : 2023/2024
Matière: Mathématiques	Bac Sciences 1	13 Mars 2024	Durée : 3 heures
Devoir de Synthèse N° 2			

NB: **Le sujet comporte cinq pages numérotées de 1/5 à 5/5 .**
La page 5/5 à rendre avec la copie

Exercice 1 : 5 Points

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

Dans la figure ci-contre :



- ABCDEFGH est un cube d'arrête 1 .
- Le point I est le centre de la face ABCD.
- Le point J est le milieu du segment [GH].

1 **a** Justifier que : $I(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ et $J(\frac{1}{2},1,1)$.

b En déduire que $\overrightarrow{DI}\wedge\overrightarrow{DJ}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$.

c Calculer le volume V du tétraèdre EDIJ .

2 **a** Soit le plan $\mathscr{P}=(DIJ)$.
Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2x+2y-z-2=0$.

b Soit Δ la droite passant par E et perpendiculaire à $\mathscr{P}$ en un point K .

i. Vérifier que la droite Δ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=2\alpha \\ y=2\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

ii. Déduire les coordonnées du point K.

iii. Soit $L(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})$. Vérifier que K est le milieu du segment [DL] .

c. Soit M un point variable de la droite Δ.
Montrer que le volume V_α du tétraèdre MDIJ est égal à $\frac{1}{8}|3\alpha - 1|$.

d. Déterminer les coordonnées du point M pour que : $V_\alpha = 2V$.

3. Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace E tels que : $x^2+y^2+z^2-4x-4y+3=0$.

a. Montrer que S est une sphère de centre $\Omega(2,2,0)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

b. Vérifier que les points D et L appartiennent au sphère S.
En déduire que S et $\mathscr{P}$ sont sécants selon un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

4. Soit le point N(2,-3,-4).

a. Montrer que la droite (DN) est tangente à $\mathscr{C}$ dans le plan $\mathscr{P}$.

b. Prouver que le volume V′ du tétraèdre ΩKDN est égal à $\frac{DN \times DK \times K\Omega}{6}$.

c. En déduire la valeur de V′ .

Exercice 2 : 5 Points

Un commerçant spécialisé en phtographie numérique propose en promotion un modèle d'appreil photo numérique et un modèle de carte mémoire compatible avec cet appareil .
Il a constaté, lors d'une précédente promotion, que :

- 20% des clients achètent l'appareil photo en promotion .
- 70% des clients qui achètent l'appreil photo en promotion , achètent la carte mémoire en promotion .
- 60% des clients n'achètent ni l'appreil photo en promotion ni la carte mémoire en promotion.

Un client entre dans le magasin .
On note A l'événement : " le client achète l'appareil photo en promotion " .
On note C l'événement : " le client achète la carte mémoire en promotion " .

1. a. Donner les probabilités : $p(\overline{A})$ et $p(\overline{A}\cap\overline{C})$.

b. Un client n'achète pas l'appareil photo en promotion. Calculer la probabilité qu'il n'achète pas la carte mémoire en promotion .

2. Dans la **figure 1** de l'annexe jointe compléter l' arbre pondéré décrivant la situation .

3. Montrer que la probabilité qu'un client achète la carte mémoire en promotion est 0,34 .

4. Sachant qu'un client achète la carte mémoire en promotion . Calculer la probabilité que ce client achète aussi l'appareil photo en promotion .

5. Le commerçant fait un bénéfice de 30 DT sur chaque appariel photo en promotion et un bénéfice de de 4 DT su chaque carté mémoire en promotion .
On désigne par X la variable aléatoire égale au bénéfice du commerçant par client .

a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Bénéfice par client en DT : x_i	0	.....	.....	.....
Probabilité d'atteindre le bénéfice : p_i	0.6	.....	.....	.....

b) Détermier l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X .

c) Pour 100 clients entrant dans ce magasin, quel bénéfice le commerçant peut-il espérer tirer de sa promotion .

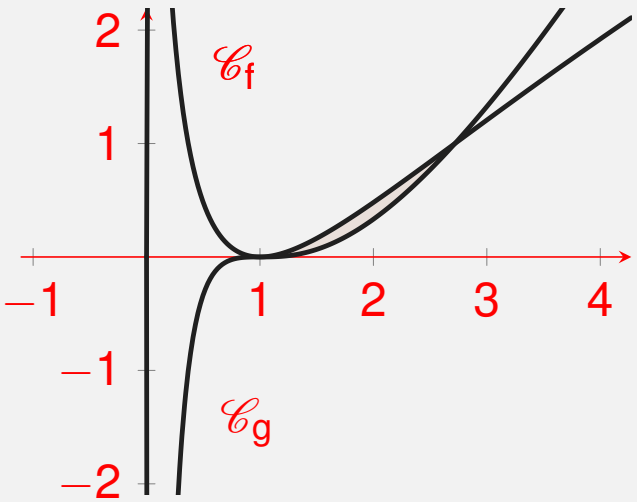
6) Cinq clients entrent dans le magasin . On suppose que leurs comportements d'achat sont indépendants .
Déterminer la probabilité qu'au moins un de ces cinq clients n'achètent pas la carte mémoire en promotion .

Exercice 3 : 4 Points

Soit f et g deux fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln^2(x)$ et $g(x)=\ln^3(x)$.

Leurs courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont représentées ci-contre dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère la suite (J_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $J_n=\int_1^e \ln^n(x)dx$.



1) a) Montrer que $J_1=1$.

b) A l'aide d' une intégration par parties, montrer que $J_{n+1}+(n+1)J_n=e$.

c) En déduire la valeur de J_2 et J_3 .

2) a) Déterminer les coordonnées des points d' intersection des deux courbes .

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en unité d' aire de la partie du plan limitée par les deux courbes .

3) Calculer le volume $\mathscr{V}$ engendré par la rotation de l' arc
$C=\{M(x,y)$ tel que $y=f(x)$ et $1\leq x\leq e\}$ autour de l' axe des abscisses .

4) a) Montrer que la suite (J_n) est à termes positifs et qu'elle est décroissante .

b) Déduire de la question 1)b) que : $\frac{e}{n+2}\leq J_n\leq\frac{e}{n+1}$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nJ_n$.

Exercice 4 : 6 Points

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=-x+\ln(1+x^2)$.
On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a) Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $f'(x)=-\dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$
   b) Ecrire une équation de Δ de la demi-tangente à $\mathscr{C}_f$ à droite du point O .
2. a) Vérifier que pour tout réel $x\in]0,+\infty[$ on a : $f(x)=-x+2\ln(x)+\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$.
   c) Montrer alors que Δ est une direction asymptotique de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
   d) Dresser le tableau de variation de f .
   e) En déduire que Pour tout réel $x\in[0,+\infty[$ on a : $\ln\left(1+x^2\right)\leq x$.
3. Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe on donne la courbe représentative Γ de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=-x+\ln(1+x)$.
   a) Vérifier que $A(1;-1+\ln(2))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$, puis en utilisant la courbe Γ placer le point A .
   b) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Γ .
   c) Construire Δ et $\mathscr{C}_f$.
4. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=\dfrac{3}{2} \\ U_{n+1}=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+(U_n)^2\right) \text{ ; pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$
   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_n>0$.
   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}U_n$.
   c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_n\leq\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   d) Déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite .
5. Soit la suite (S_n) définie sur $n\in\mathbb{N}$ par : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}U_k=U_0+U_1+U_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+U_n$.
   a) Montrer que la suite (S_n) est strictement croissante .
   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $S_n\leq 3-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   c) Déduire que la suite (S_n) est convergente .

Nom et prénom :.....

Épreuve : Mathématiques - Section : Sciences Expérimentales
◊ Session Mars 2024 ◊
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1 (Exercice 2)

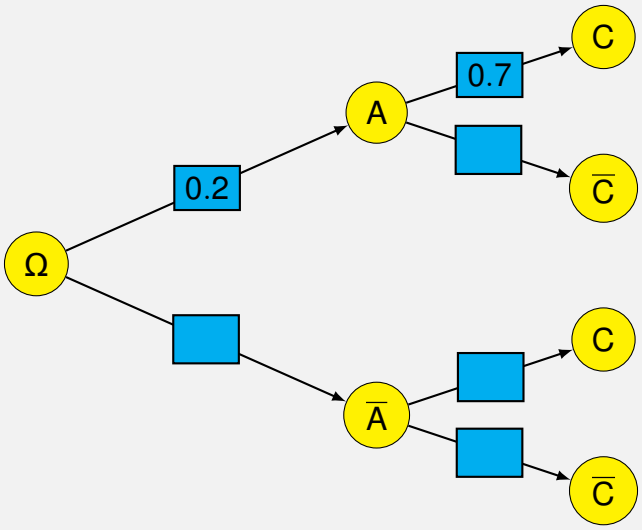
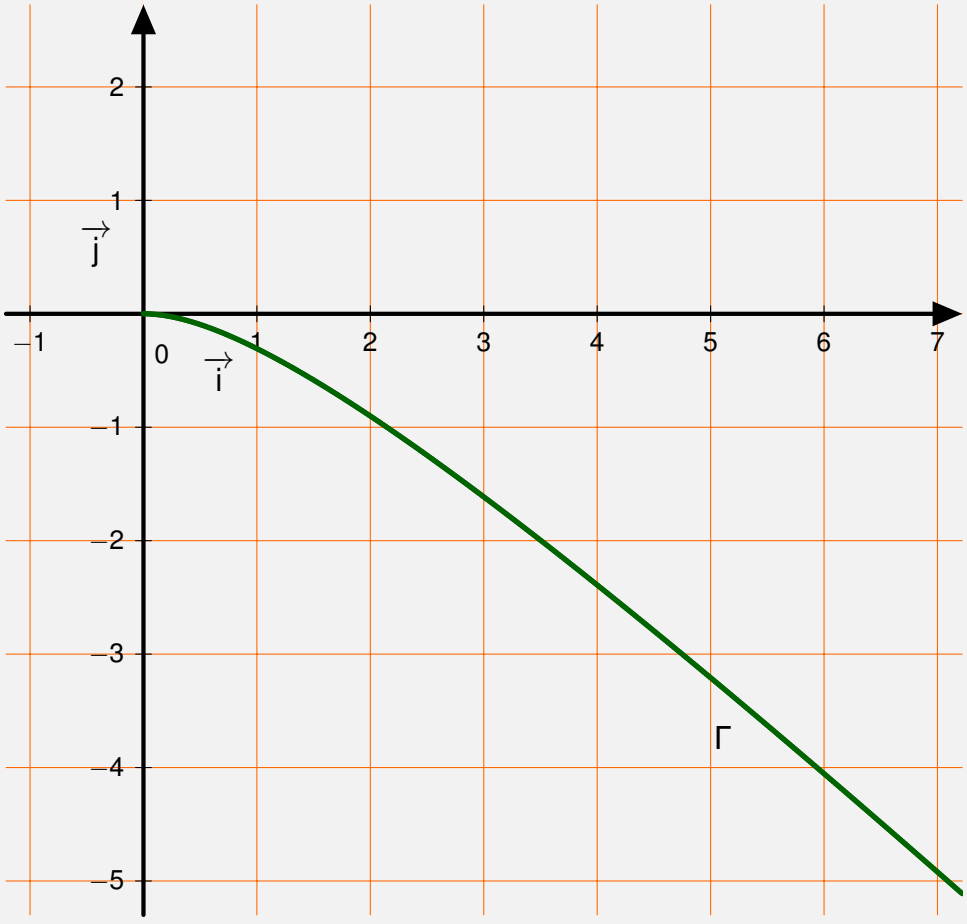



Figure 2 (Exercice 4)